
ACTA UNIVERSITATIS LODZIENSIS
FOLIA PHILOSOPHICA 17, 2006

<https://doi.org/10.18778/0208-6107.17.02>

Piotr Łukowski

Uniwersytet Łódzki

O CO CHODZI W PARADOKSIE PROTAGORASA?*

Starożytny paradoks Protagorasa bywa kojarzony z logikami deontycznymi. Wydaje się, iż taką perspektywę postrzegania problemu narzuca sama treść paradoksu. W istocie, kwestia powinności zapłacenienia za naukę może być uważana za kluczową dla rozwiązania tej zagadki. Lennart Åqvist sam stawia sobie pytanie o to, czy logiczna teoria norm i normatywnych systemów może być pomocna w rozwiązaniu tego problemu [Åqvist 1984, s. 607]. Nie dając na to pytanie odpowiedzi, kieruje uwagę czytelnika na publikacje Smullyana, Lenzena oraz swoją, sugerując deontyczny charakter paradoksu Protagorasa¹. Biorąc pod uwagę kontekst paradoksu Protagorasa, dość odważnie i zarazem prowokacyjnie przytacza opinię Russella z pracy *O denotowaniu*, iż teoria naukowa winna być testowana pod względem swojej zdolności radzenia sobie z łamigłówkami, które w tym procesie winny odgrywać rolę analogiczną do tej, pełnionej w fizyce przez eksperymenty.

Czy jednak prawdą jest, że sprzeczność, do jakiej prowadzi argumentacja paradoksu Protagorasa, jest konsekwencją jakiegoś problemu deontycznego? Czy faktycznie paradoks ten wynika ze źle pojętego obowiązku, czy może z zaniedbania wypełnienia jakiegoś obowiązku? Co jest sednem tego paradoksu? Co jest prawdziwą przyczyną jego sprzecznej argumentacji? Czy propozycja Åqvista testowania teorii logik deontycznych za pomocą paradoksu Protagorasa nie jest nazbyt ryzykowana?

Paradoks Protagorasa niepotrzebnie zrosł się z wprowadzającymi w błąd opiniami i koncepcjami. Jego powiązania z logikami deontycznymi wydają się być powierzchowne. Źródłem zaś wszystkich tych błędów jest nierozpoznanie sedna paradoksu.

Paradoks. Postać Protagorasa jest obok Sokratesa jedną z dwóch głównych postaci Platńskiego dialogu *Protagoras*. Obraz tego sławnego sofisty,

* Autor pragnie podziękować profesorowi Jerzemu Pogonowskiemu za cenne uwagi dotyczące tekstu.

¹ Wszystkie trzy przytoczone przez Åqvista prace są przez nas dalej analizowane.

jaki przekazał nam Platon, jest wyraźny. Protagoras jest osobą znaczącą w świecie starożytnych miast greckich. Można rzec, że każde jego wejście do któregoś z nich jest tryumfalne. Moźni pragną gościć go w swoich domach, mimo iż pociąga to za sobą konieczność zaproszenia całej rzeszy jego uczniów i wyznawców, a także wielbicieli. Nawet sam niepokonany w dyskusjach Sokrates w konfrontacji z Protagorasem staje się chwilami nieco bezradny. Platon przedstawia dyskusję obu filozofów jako starcie się dwóch wybitnych, godnych siebie przeciwników.

Znany od dwóch tysiącleci *paradoks Protagorasa*, występujący również pod nazwą *paradoksu nauczyciela prawa* lub *Euathlosa*, można przedstawić w postaci następującej anegdoty:

Znany i powszechnie poważany Protagoras miał ucznia o imieniu Euathlos. Jak wielu w owym czasie, Euathlos kształcił się u Protagorasa na prawnika. Nic więc dziwnego, iż miarą wartości wykształcenia Euathlosa miały się okazać jego ewentualne sukcesy odniesione w procesach sądowych. Protagoras przyjął więc honorową zasadę, iż Euathlos zapłaci mu za naukę tylko wówczas, gdy po ukończeniu nauki wygra swój pierwszy proces przed sądem. Gdy nauka dobiegła końca, Protagoras znając wysokie umiejętności swojego ucznia liczył na rychłą i pewną zapłatę. Niestety, w swoich rachubach srodze się przeliczył. Okazało się bowiem, iż mimo długiego czasu, jaki zdołał upłynąć od zakończenia nauki, Euathlos nie tylko nie podejmował się żadnego procesu, lecz nic nie wskazywało na to, iż w najbliższym czasie stanie przed sądem jako jedna ze stron. Sytuacja ta zrobiła się nieznośna dla Protagorasa i to zapewne nie z powodów finansowych. Zarówno szacunek, jakim cieszył się Protagoras, jak i sława jego niezwykle przenikliwego umysłu, mogły ponieść znaczną szkodę, gdyby stan ten trwał przez dłuższy czas. Nie mógł przecież pokazać, iż jest bezradny wobec swojego własnego ucznia. Nic więc dziwnego, że sprawa ta stała się dla niego niezwykle ważna i że w końcu znalazł dla niej szczęśliwe, zdawać by się mogło, dla niego rozwiązanie. Przy pierwszej okazji spotkania z Euathlosem Protagoras oświadczył swojemu uczniowi co następuje: „Miałeś, mój drogi uczniu, szansę na niezaplacenie za naukę, gdyby ta okazała się niewystarczająca do prowadzenia sporów przed sądem. Miałeś, ale ją straciłeś. Teraz bowiem, bez względu na to, czy wygrasz sprawę, czy przegrasz będziesz mi musiał zapłacić, gdyż ja ci proces wytaczam. Jeśli więc go wygrasz, będziesz mi musiał zapłacić pieniądze ma mocy umowy, jaką zawarliśmy. Jeśli natomiast przegrasz, będziesz mi musiał zapłacić decyzją sądu.” Interesujące jest, czy odpowiedź Euathlosa była natychmiastowa, czy może nastąpiła po upływie jakiegoś czasu. Niemniej musiała być dla Protagorasa sporym zaskoczeniem. Uczeń stwierdził bowiem: „W obu przypadkach, drogi mistrzu, nie mogę zapłacić żadnych pieniędzy. Skoro bowiem wygram proces, to od kiedy płaci ten, kto proces wygrywa? Jeśli zaś przegram, to przed zaplaceniem pieniędzy uchroni mnie nasza umowa, jaką swojego czasu zawarliśmy”. Przyjmując założenie, że wspomniany proces stał się faktem, dochodzimy do szokującego wniosku, iż bez względu na orzeczenie sędziów, powstała sytuacja jest sprzeczna. Zakładając, iż proces musi zakończyć się wygraną jednej ze stron, w obu możliwych przypadkach mamy przecież sprzeczność: Euathlos musi zapłacić Protagorasowi pieniądze i zarazem nie może tego uczynić.

Z cytowanej anegdoty jasno wynika zasadnicza kwestia paradoksu Protagorasa. Jest nią powstała w wyniku zawarcia niefortunnej umowy oraz późniejszego procesu sprzeczność. Chociaż mocno wierzymy w to, że w przeciwieństwie do nauk, także tych ścisłych, jak i nawet samej matematyki, rzeczywistość nie może być sprzeczna, to jednak rzeczywistość wzbogacona

o element o charakterze językowym może okazać się sprzeczna. Sprzeczność rzeczywistości jest tu rozumiana jako jednoczesne zajście i nie zajście tej samej sytuacji, tego samego zdarzenia. Elementem, w którego mocy wydaje się być usprzecznienie rzeczywistości, jest umowa. Bez trudu można nawet wyobrazić sobie dużo prostsze umowy, których sprzeczność jest jawna i w związku z tym łatwa do wykrycia:

Jeśli Euathlos przegra proces, to jest zobowiązany do jednoczesnego zapłacenia i niezapłacenia za naukę.

Jasne jest więc, iż zakładając niesprzeczność rzeczywistości pozajęzykowej, możemy otrzymać sprzeczność wykorzystując element językowy. Należy tu mocno podkreślić fakt, iż tak uzyskana sprzeczność rzeczywistości ma wyłącznie charakter językowy. Przecież nie jest prawdą, że paradoks Protagorasa prowadzi do sprzeczności polegającej na tym, iż Euathlos jednocześnie płaci i nie płaci Protagorasowi za naukę. Nie istnieje bowiem żadne najmniejsze zagrożenie jednoczesnego zajścia i nie zajścia tej samej pozajęzykowej sytuacji. Sprzeczność wynikająca z paradoksalnej argumentacji jest czysto językowej natury: Euathlos jednocześnie powinien i nie powinien zapłacić za naukę.

Nic więc dziwnego, że jedno z możliwych podejść do paradoksu, a reprezentowane przez Kazimierza Ajdukiewicza zakłada takie właśnie rozumienie całego zdarzenia. Ajdukiewicz uważa, iż wadliwie sformułowana umowa, jaką zawarł Protagoras z Euathlosem, implikuje sprzeczność, co jest *de facto* przyczyną niemożności spełnienia jej warunków [Ajdukiewicz 1985, s. 143].

Problem prawniczy zamiast logicznego oraz ukryta sprzeczność. Może się wydawać, że zupełnie nowymi wobec podejścia Ajdukiewicza są propozycje Smullyana, Åqvista, Lenzena i Grodzińskiego. Wszyscy czterej zastanawiają się bowiem nad tym, co powinien uczynić Protagoras, aby odzyskać od Euathlosa pieniądze. Zastępują więc problem logiczny prawniczym. Kwestią przez nich analizowaną nie jest sprzeczność stworzonej przez obu filozofów sytuacji, lecz dość prosty, bo pozallogiczny problem odzyskania długu.

Raymond M. Smullyan uczciwie przyznając się do tego, iż nie jest wcale przekonany co do trafności referowanego przez siebie rozwiązania paradoksu, przytacza opinię znajomego prawnika, który uważa, że w pierwszym procesie Protagorasa przeciw uczniowi sąd powinien wydać wyrok na korzyść ucznia. Potem jednak Protagoras winien wytoczyć drugą sprawę Euathlosowi, którą z kolei powinien wygrać. W ten oto sposób, z jednej strony, umowa zostałaby uszanowana przez sędziów w trakcie obu procesów, z drugiej zaś, Protagoras otrzymałby zapłatę za swoją pracę [Smullyan 1978, s. 188–189].

Formalizację tego podejścia proponują W. Lenzen [1977] i Lennart Åqvist [1981]. Swoje rozwiązanie paradoksu Lenzen poprzedza formalizacją dylematu, w której stosuje tak zwaną *logikę bazową*, określoną aksjomatyką klasycznego rachunku zdań, aksjomatami dla operatora konieczności \Box modalnego systemu S5 oraz aksjomatami dla predykatu identyczności. Jedyną regułą inferencji logiki bazowej jest *Modus Ponens*. Rozważmy teraz cztery postulaty²:

- P1. $A \Rightarrow (OZb \leftrightarrow G(b,p))$;
 P2. $(G(b,p^+) \leftrightarrow (V(p^+) \Rightarrow - OZb)) \ \& \ (G(a,p^+) \leftrightarrow (V(p^+) \Rightarrow OZb))$;
 P3. $p = p^+$;
 P4. $(V(p^+) \Rightarrow OZb) \leftrightarrow - (V(p^+) \Rightarrow - OZb)$.

Symbole występujące w formułach P1–P4 są wprowadzone następującymi definicjami³:

- D0. $a = \textit{Protagoras}$;
 D1. $b = \textit{Euathlos}$;
 D2. $A = \textit{umowa jaką zawarł Protagoras z Euathlosem}$;
 D3. $\textit{Prawdziwe } A \leftrightarrow A \textit{ jest prawdziwe}$;
 D4. $p = \textit{pierwsza rozprawa sądowa, w której Euathlos jest stroną}$;
 D5. $p^+ = \textit{rozprawa sądowa Protagorasa przeciwko Euathlosowi}$;
 D6. $V(p^+) = \textit{werdykt sądu w sprawie } p^+$;
 D7. $\textit{Poprawne } V(p^+) \leftrightarrow V(p^+) \textit{ jest poprawny}$ ⁴;
 D8. $OZb \leftrightarrow \textit{Euathlos jest zobowiązany do zapłacenia za naukę}$;
 D9. $G(b,p) \leftrightarrow \textit{Euathlos wygrywa sprawę } p$;
 D10. $G(b,p^+) \leftrightarrow \textit{Euathlos wygrywa sprawę } p^+$;
 D11. $G(a,p^+) \leftrightarrow \textit{Protagoras wygrywa sprawę } p^+$;
 D12. $(A \Rightarrow \Phi) \leftrightarrow \Box (\textit{Prawdziwe } A \rightarrow \Phi)$;
 D13. $(V(p^+) \Rightarrow \Phi) \leftrightarrow \Box (\textit{Poprawne } V(p^+) \rightarrow \Phi)$.

Postulat pierwszy stwierdza, że z umowy A wynika, iż Euathlos jest zobowiązany zapłacić za naukę wtedy i tylko wtedy, gdy wygra swoją pierwszą rozprawę p . Drugi postulat określa wyrok sądu w sprawie wytoczonej Euathlosowi przez Protagorasa w zależności od tego, czy wygrana przypadnie nauczycielowi, czy też uczniowi. Kolejny postulat wyraża fakt, iż sprawa,

² Formalizacja Lenzena jest tu przedstawiona w symbolice Åqvista [Åqvist [1981]].

³ Åqvist precyzuje, że w podanych czternastu definicjach symbole „=”, „ \rightarrow ”, „ \Rightarrow ”, „ \leftrightarrow ” powinny być odpowiednio czytane jako: ... *jest identyczne z* ..., *jeżeli ... to* ..., ... *wtedy i tylko wtedy, gdy* ..., *jest konieczne, aby*...

⁴ Najprawdopodobniej, poprawność werdyktu sądowego oznacza jego jednoznaczność i niesprzeczność.

jaką Protagoras wytoczył swojemu uczniowi, jest pierwszą rozprawą Euathlosa. Wreszcie ostatni postulat stwierdza, że albo zajdzie sytuacja polegająca na tym, że $V(p^+) \Rightarrow OZb$, albo $V(p^+) \Rightarrow -OZb$.

Ze zbioru $\{P1, P2, P3, P4\}$ wynikają następujące formuły:

- | | | |
|------------|--|-----------------------------|
| <i>C0.</i> | $G(a,p^+) \leftrightarrow -G(b,p^+)$ | <i>Wprost z P2, P3, P4;</i> |
| <i>C1.</i> | $G(b,p) \leftrightarrow -G(b,p^+)$ | <i>Wprost z P3;</i> |
| <i>C2.</i> | <i>Prawdziwe</i> $A \rightarrow (OZb \leftrightarrow G(b,p))$ | <i>P1, D12;</i> |
| <i>C3.</i> | <i>Prawdziwe</i> $A \rightarrow (OZb \leftrightarrow (V(p^+) \Rightarrow -OZb))$ | <i>C2, C1, P2.</i> |

Wykorzystując *C0–C4* Lenzen udowadnia twierdzenie:

Tw. 1 Ze zbioru przesłanek $\{P1, P2, P3, P4\}$ wynika formuła:
– *Prawdziwe* $A \vee -$ *Poprawne* $V(p^+)$;

Dowód.

- | | | |
|------------|---|--------------------|
| <i>1.</i> | <i>Prawdziwe</i> A | <i>Założenie;</i> |
| <i>2.</i> | $OZb \leftrightarrow (V(p^+) \Rightarrow -OZb)$ | <i>1, C3;</i> |
| <i>3.</i> | OZb | <i>Założenie;</i> |
| <i>4.</i> | $V(p^+) \Rightarrow -OZb$ | <i>2, 3;</i> |
| <i>5.</i> | <i>Poprawne</i> $V(p^+) \rightarrow -OZb$ | <i>4, D13;</i> |
| <i>6.</i> | $-$ <i>Poprawne</i> $V(p^+)$ | <i>3, 5;</i> |
| <i>7.</i> | $OZb \rightarrow -$ <i>Poprawne</i> $V(p^+)$ | <i>3–6;</i> |
| <i>8.</i> | $-OZb$ | <i>Założenie;</i> |
| <i>9.</i> | $-(V(p^+) \Rightarrow -OZb)$ | <i>2, 8;</i> |
| <i>10.</i> | $V(p^+) \Rightarrow OZb$ | <i>9, P4;</i> |
| <i>11.</i> | <i>Poprawne</i> $V(p^+) \rightarrow OZb$ | <i>10, D13;</i> |
| <i>12.</i> | $-$ <i>Poprawne</i> $V(p^+)$ | <i>8, 11;</i> |
| <i>13.</i> | $-OZb \rightarrow -$ <i>Poprawne</i> $V(p^+)$ | <i>8–12;</i> |
| <i>14.</i> | $OZb \vee -OZb$ | <i>Tautologia;</i> |
| <i>15.</i> | $(OZb \vee -OZb) \rightarrow -$ <i>Poprawne</i> $V(p^+)$ | <i>7, 13;</i> |
| <i>16.</i> | $-$ <i>Poprawne</i> $V(p^+)$ | <i>14, 15;</i> |
| <i>17.</i> | <i>Prawdziwe</i> $A \rightarrow -$ <i>Poprawne</i> $V(p^+)$ | <i>1–16;</i> |
| <i>18.</i> | $-$ <i>Prawdziwe</i> $A \vee -$ <i>Poprawne</i> $V(p^+)$ | <i>17. ■</i> |

Z twierdzenia 1 natychmiast wynika kolejne:

Tw. 2 Ze zbioru przesłanek $\{P1, P2, P3, P4, P5\}$ wynika formuła:
– *Poprawne* $V(p^+)$;
Ze zbioru przesłanek $\{P1, P2, P3, P4, P6\}$ wynika formuła:
– *Prawdziwe* A ;

gdzie:

P5. Prawdziwe A;

P6. Poprawne $V(p^+)$.

Zarówno z pierwszej, jak i z drugiej części twierdzenia 2 wynika ostatecznie:

Tw. 3 Zbiór przesłanek $\{P1, P2, P3, P4, P5, P6\}$ jest sprzeczny.

Lenzen pokazał, że w jego formalizacji zachodzą dwie zależności. Po pierwsze, uznanie prawdziwości umowy, jaką zawarli Protagoras z Euathlosem, implikuje niepoprawność orzeczenia sądu w sprawie Protagoras *versus* Euathlos, jakie by ono nie było, po drugie zaś, uznanie poprawności jakiegokolwiek orzeczenia sądu w tej sprawie implikuje nieprawdziwość umowy. Nic więc dziwnego, że jednoczesne założenie prawdziwości umowy oraz poprawności orzeczenia sądu implikuje sprzeczność. Zarówno argumentacja Protagorasa, jak i Euathlosa muszą więc prowadzić do sprzeczności:

Argumentacja Protagorasa:

- | | |
|---|----------------------------|
| 1. $G(a, p^+)$ | <i>założenie pierwsze;</i> |
| 2. OZb | <i>1, P2, D13, P6;</i> |
| 3. $G(b, p^+)$ | <i>założenie drugie;</i> |
| 4. $G(b, p)$ | <i>3, P3;</i> |
| 5. OZb | <i>4, P1, D12, P5;</i> |
| 6. $(G(a, p^+) \vee G(b, p^+)) \rightarrow OZb$ | <i>1–2, 3–5;</i> |
| 7. OZb | <i>6, C0.</i> |

Argumentacja Euathlosa:

- | | |
|---|----------------------------|
| 1. $G(b, p^+)$ | <i>założenie pierwsze;</i> |
| 2. $\neg OZb$ | <i>1, P2, D13, P6;</i> |
| 3. $G(a, p^+)$ | <i>założenie drugie;</i> |
| 4. $\neg G(b, p)$ | <i>3, C0;</i> |
| 5. $\neg OZb$ | <i>4, P1, D12, P5;</i> |
| 6. $(G(a, p^+) \vee G(b, p^+)) \rightarrow OZb$ | <i>1–2, 3–5;</i> |
| 7. $\neg OZb$ | <i>6, C0.</i> |

Można uznać, iż do tego miejsca Lenzen nie wniósł niczego nowego do analizy Ajdukiewicza. Różnica między propozycją Ajdukiewicza a Lenzena tkwi jedynie w formie prezentacji, nieformalnej w pierwszym przypadku i sformalizowanej w drugim. Przedstawiona wyżej analiza Lenzena jest jednak zaledwie diagnozą problemu. Właściwym bowiem rozwiązaniem paradoksu

jest, zdaniem Lenzena, druga zaproponowana przez niego konstrukcja wykorzystująca logikę bazową rozszerzoną o klasyczny kwantyfikator ogólny \forall , oraz dziesięć kolejnych definicji:

- D14. $Z^{\leq t} b \leftrightarrow$ Euathlos zapłacił za naukę do chwili t
 D15. $G^{\leq t} (b, p) \leftrightarrow$ Euathlos wygrał swoją pierwszą sprawę p do chwili t
 D16. $G^{\leq t} (b, p^+) \leftrightarrow$ Euathlos wygrał sprawę p^+ do chwili t
 D17. $O^t Zb \leftrightarrow$ Euathlos jest w chwili t zobowiązany zapłacić za naukę
 D18. $t^+ =$ czas przed ogłoszeniem wyroku w sprawie p^+
 D19. $p^{++} =$ druga sprawa sądowa wytoczona Euathlosowi przez Protagorasa
 D20. $t^{++} =$ czas przed ogłoszeniem wyroku w sprawie p^{++} ⁵
 D21. $V(p^{++}) =$ werdykt jaki zapadł w sprawie p^{++}
 D22. $G(b, p^{++}) \leftrightarrow$ Euathlos wygrywa sprawę p^{++}
 D23. $G(a, p^{++}) \leftrightarrow$ Protagoras wygrywa sprawę p^{++}

Jak widać, Lenzen wprowadza współczynnik czasu umożliwiając mu rozważanie dwóch następujących po sobie procesów sądowych. Dysponując powyższymi definicjami, analizuje zmieniony zbiór postulatów:

- P1a. $A \Rightarrow \forall t (O^t Zb \leftrightarrow (G^{\leq t} (b, p) \ \& \ - \ Z^{\leq t} b));$
 P2a. $(G(b, p^+) \leftrightarrow - O^{t^+} Zb) \ \& \ (G(a, p^+) \leftrightarrow O^{t^+} Zb);$
 P2b. $(G(b, p^{++}) \leftrightarrow - O^{t^{++}} Zb) \ \& \ (G(a, p^{++}) \leftrightarrow O^{t^{++}} Zb);$
 P3. $p = p^+;$
 P5. Prawdziwe A ;
 P7. $- G^{\leq t^+} (b, p^+);$
 P8. $G^{\leq t^{++}} (b, p^+);$
 P9. $- Z^{\leq t^{++}} b.$

Zdaniem Åqvista, najważniejszym postulatem jest *P1a*, który głosi: z umowy A wynika, że dla dowolnej chwili czasu t jest tak, że Euathlos jest w chwili t zobowiązany zapłacić za naukę wtedy i tylko wtedy, gdy Euathlos do chwili t wygrał swoją pierwszą sprawę i wciąż jeszcze do chwili t nie zapłacił za naukę Protagorasowi. Postulaty *P2a* oraz *P2b* dotyczą odpowiednio pierwszej i drugiej rozprawy sądowej. Zgodnie z *P2a*: Euathlos wygra sprawę pierwszą wtedy i tylko wtedy, gdy nie jest zobowiązany zapłacić za naukę w chwili poprzedzającej wyrok w pierwszej sprawie. Zgodnie zaś z *P2b*: Protagoras wygra sprawę pierwszą wtedy i tylko wtedy, gdy Euathlos jest zobowiązany zapłacić za naukę w chwili poprzedzającej wyrok w pierwszej sprawie. Postulat

⁵ Aby postulat *P7* nie budził wątpliwości definicja *D20* winna określać chwilę t^{++} jako poprzedzającą chwilę orzeczenia werdyktu w sprawie p^{++} jednak późniejszą względem chwili, w której zapadł wyrok w sprawie p^+ , komentarz PŁ.

P7 głosi, iż: *nie jest prawdą, że Euathlos wygrał swoją pierwszą sprawę przed zapadnięciem wyroku w pierwszej rozprawie. Według P8: Euathlos wygrał swoją pierwszą sprawę przed zapadnięciem wyroku w drugiej sprawie. Ostatni postulat P9 zakłada, że: Euathlos nie zapłacił za naukę do chwili ogłoszenia wyroku w drugiej rozprawie.*

Ostatnim krokiem rozumowania rzekomo rozwiązującego paradoks Protagorasa jest udowodnione przez Lenzena następujące twierdzenie:

- Tw. 4** Niech $L_1 = \{P1a, P2a, P3, P5, P7\}$, $L_2 = \{P1a, P2b, P3, P5, P8, P9\}$. Wówczas,
- (i) Ze zbioru L_1 wynika formuła: $\neg O^{t+} Zb \ \& \ G(b, p^+)$;
 - (ii) Ze zbioru L_2 wynika formuła: $O^{t++} Zb \ \& \ G(a, p^{++})$;
 - (iii) Ze zbioru $L_1 \cup L_2$ wynika formuła: $\neg O^{t+} Zb \ \& \ G(b, p^+) \ \& \ O^{t++} Zb \ \& \ G(a, p^{++})$.

Dowód części (i):

- | | |
|---|----------------------|
| 1. $\forall t (O^t Zb \leftrightarrow (G^{\leq t}(b, p) \ \& \ \neg Z^{\leq t} b))$ | <i>P1a, D12, P5;</i> |
| 2. $O^{t+} Zb \leftrightarrow (G^{\leq t+}(b, p) \ \& \ \neg Z^{\leq t+} b)$ | <i>1;</i> |
| 3. $\neg G^{\leq t+}(b, p)$ | <i>P3, P7;</i> |
| 4. $\neg O^{t+} Zb$ | <i>2, 3;</i> |
| 5. $G(b, p^+)$ | <i>4, P2a;</i> |
| 6. $\neg O^{t+} Zb \ \& \ G(b, p^+)$ | <i>4, 5.</i> |

Dowód części (ii):

- | | |
|---|----------------------|
| 1. $\forall t (O^t Zb \leftrightarrow (G^{\leq t}(b, p) \ \& \ \neg Z^{\leq t} b))$ | <i>P1a, D12, P5;</i> |
| 2. $O^{t++} Zb \leftrightarrow (G^{\leq t++}(b, p) \ \& \ \neg Z^{\leq t++} b)$ | <i>1;</i> |
| 3. $G^{\leq t++}(b, p)$ | <i>P3, P8;</i> |
| 4. $O^{t++} Zb$ | <i>2, 3, P9;</i> |
| 5. $G(a, p^{++})$ | <i>4, P2b;</i> |
| 6. $O^{t++} Zb \ \& \ G(a, p^{++})$ | <i>4, 5.</i> |

Część (iii) jest natychmiastowym wnioskiem z (i) oraz (ii). ■

Zbiory L_1 i L_2 określają warunki charakterystyczne dla sytuacji związanej odpowiednio z pierwszą i drugą rozprawą Protagorasa przeciwko Euathlosowi. Jak widać, to żmudne, bardzo dokładne, sformalizowane rozumowanie nie wnosi nic ponad to, co zostało powiedziane w zacytowanej wcześniej lakonicznej uwadze Smullyana⁶: *jeśli Protagoras wytoczył swojemu uczniowi*

⁶ Publikacja książki Smullyana, w której autor wypowiada się na temat rozwiązania paradoksu za pomocą dwóch rozpraw sądowych, jest o rok późniejsza od artykułu Lenzena prezentującego przypomnianą tu analizę.

dwie rozprawy, to pierwsza skończyła się wygraną Euathlosa i tym samym umożliwiła nauczycielowi wygranę drugiej. A zatem do zapadnięcia wyroku w pierwszej rozprawie Euathlos nie był zobowiązany do zapłacenia za naukę. Natomiast od chwili wydania wyroku w pierwszej rozprawie uczeń jest zobowiązany do zapłacenia swojemu mistrzowi pieniędzy. Pojawia się tutaj dość naturalne i wręcz oczywiste pytanie:

Po co Lenzen i Smullyan rozważają drugą sprawę sądową?

Przecież już na mocy samej umowy *A* uczeń jest zobowiązany do zapłacenia nauczycielowi pieniędzy. Skoro rozważana jest druga rozprawa, równie dobrze można przyjąć, że Protagoras będzie musiał wytoczyć Euathlosowi trzecią, a może i czwartą, bo widać tu wyraźnie, iż zarówno Lenzen, jak i Smullyan zakładają nieuczciwość Euathlosa.

Ich podejście jest dość nietypowe ze względu na tradycyjną metodę pracy z paradoksami. Wprowadzenie do rozwiązania drugiej rozprawy jest niewłaściwe, bo zakłada nieuczciwość Euathlosa, który, ich zdaniem, najwidoczniej robi wszystko, aby nie zapłacić za naukę. Tymczasem standardowe podejście do paradoksów nakazuje przyjąć i to bez potrzeby wypisywania dodatkowych warunków, że bohaterowie anegdot czynią dokładnie to, co powinni. A zatem w paradoksie krokodyla krokodyl odda dziecko, jeśli okaże się, że powinien, Euathlos zapłaci zaś za naukę. Zakładanie, że będzie tego unikał, mimo iż logiczne rozumowanie będzie mu to jednoznacznie nakazywało, jest podejściem niezgodnym z tradycją analizowania i rozwiązywania paradoksów. Równie dobrze zamiast przyjąć prawdomówność krokodyla, można by założyć, iż okłamuje on matkę. Cóż jednak by pozostało z paradoksów przy takim do nich podejściu? Na pewno przestałyby być problemami logiki.

Inny powód, dla którego rozwiązanie Lenzena jest chybione, został wyjaśniony wcześniej i sprowadza się do tego, że miejsce typowo logicznego problemu zajęła kwestia zastępcza. Przecież istotą paradoksu nie jest problem odzyskania pieniędzy, lecz sprzeczność sytuacji wykreowanej wspólnie przez nauczyciela i jego ucznia. Ponadto, Lenzen zakłada sprzeczność umowy *A* z innymi postulatami, co jest wyrażone w jego formalizacji, odtwarzając tym samym to, co zostało opowiedziane w anegdocie. Nie można więc powiedzieć, że wykracza poza rozwiązanie Ajdukiewicza. To, co dzieje się później, czyli po stwierdzeniu sprzeczności, jest *de facto* rozwiązywaniem problemu o prawnej naturze. Nie ma tu już miejsca na jakąkolwiek kwestię natury logicznej.

Jednak najgorsze jest to, że formalizacja Lenzena nie usuwa sprzeczności, będącej istotą paradoksu. Zapewne zarówno zbiór L_1 jak i L_2 nie są sprzeczne. Mogłoby się więc wydawać, że rozwiązanie jest poprawne:

z niesprzecznych zbiorów wynikają pożądane formuły. Tak jednak nie jest. Niemożność wyprowadzenia sprzeczności jest skutkiem specjalnego wyboru wyrażeń języka i przesłanek. Wybór ten jest sztuczny i niewłaściwy z tego powodu, iż przemilcza to, co powinno dać się wyrazić. A zatem,

Po pierwsze: skoro brany jest pod uwagę czas przed wydaniem wyroku w pierwszej sprawie (t^+) oraz czas przed wydaniem wyroku w drugiej sprawie (t^{++}), jest zupełnie naturalne móc uwzględnić czas ogłoszenia wyroku w pierwszej sprawie (t');

Po drugie: przemilczane zostało, co oznaczają konkretne wyroki w sprawie pierwszej i w sprawie drugiej. Postulaty $P2a$ oraz $P2b$ stwierdzają jedynie, kiedy sąd wyda wyrok korzystny dla Protagorasa, a kiedy dla Euathlosa. Nie ma jednak żadnych postulatów, które mówiłyby, co dla Euathlosa oznacza wydanie przez sąd wyroku korzystnego dla Protagorasa, a co oznacza wydanie wyroku korzystnego dla niego samego.

Pierwsza uwaga ma jedynie techniczne znaczenie – ma umożliwić mówienie o tym, co się stanie w chwili ogłoszenia wyroku w pierwszej rozprawie (druga rozprawa jest bez znaczenia dla paradoksu). Uwaga druga jest bardzo istotna, jej brak uniemożliwia bowiem wyrażenie kluczowej dla całego problemu kwestii.

Uzupełnijmy więc przemilczane założenia:

1. $t^+ < t' < t^{++}$; *Dodatkowe założenie;*
2. $G(b, p^+)$ *z tw 4 (i);*
3. $O^{t^{++}} Zb$ *z tw 4 (ii);*
4. $O' Zb$ *z 1, 3;*
5. $G(b, p^+) \leftrightarrow - O' Zb$ *Brakujący postulat wyjaśniający co oznacza wygrana Euathlosa;*
6. $- O' Zb$ *z 2, 5;*
7. $O' Zb \ \& \ - O' Zb$ *z 4, 6.*

Należy podkreślić, że dodane elementy nie tylko, w niczym nie przeczą przyjętym przez Lenzena założeniom, lecz wręcz je uzupełniają. Krok czwarty powyższego dowodu stwierdza bowiem, że począwszy od chwili wydania korzystnego dla Euathlosa wyroku w jego pierwszej sprawie uczeń jest zobowiązany do zapłacenia za naukę. W kroku piątym zostaje przyjęty postulat głoszący, że wygrana pierwszej sprawy sądowej oznacza, że Euathlos nie jest zobowiązany przynajmniej w chwili wydania wyroku do zapłacenia za naukę. Przecież gdyby ten wyrok zobowiązywał Euathlosa do zapłaty, oznaczałby przegraną, a nie wygraną ucznia.

Jak widać, rozwiązanie Lenzena bazuje na niedomówieniach, dzięki którym w całej konstrukcji jest powiedziane na tyle mało, że nie tylko sprzeczności wyprowadzić się nie da, ale niewiadomy jest sens pewnego zdarzenia – sens wydanego wyroku w pierwszej sprawie.

Niestety, poddając rozwiązanie Lenzena krytyce, Åqvist nie dostrzega wyżej wymienionych problemów, lecz formułuje zarzuty dotyczące konkretnie dwóch postulatów *P2a* i *P2b*. Raczej słusznie zauważa, że chociaż oba postulaty powinny być spełnione, to jednak może się zdarzyć, że zarówno pierwszy, jak i drugi zostaną sfalsyfikowane przez decyzje sądu. W przypadku pierwszej rozprawy sądowej może się okazać, że wbrew *P2a* sąd dojdzie do wniosku, iż Euathlus powinien zapłacić za naukę. Wówczas oba człony koniunkcji, jaką jest ten postulat, winny zostać odrzucone. W analogiczny sposób Åqvist kwestionuje wartość *P2b*. Jednak nowa postać postulatów, podobnie jak ma to miejsce u Lenzena, przemilcza sens wygranej, ewentualnie przegranej Euathlosa. Przedstawiając swoją wersję rozwiązania Lenzena, Åqvist zamienia bowiem oba wątpliwe postulaty *P2a* i *P2b* na dwa jeszcze bardziej wątpliwe, chociaż przypominające wcześniejszy postulat *P2*:

P2.0 $(G(b,p^+) \leftrightarrow (V(p^+) \Rightarrow -O^{t+} Zb)) \ \& \ (G(a,p^+) \leftrightarrow (V(p^+) \Rightarrow O^{t+} Zb));$

P2.1 $(G(b,p^{++}) \leftrightarrow (V(p^+) \Rightarrow -O^{t++} Zb)) \ \& \ (G(a,p^{++}) \leftrightarrow (V(p^+) \Rightarrow O^{t++} Zb)).$

Jasne jest, że Åqvist stosuje ten sam trik co Lenzen. Postulat *P2.0* mówi bowiem tylko tyle, że: *Euathlos wygra pierwszy proces wtedy i tylko wtedy, gdy poprawny wyrok sądu pociąga za sobą fakt, iż Euathlos nie jest do chwili wydania wyroku w pierwszej sprawie zobowiązany do zapłacenia za naukę, oraz Protagoras wygra pierwszy proces wtedy i tylko wtedy, gdy poprawny wyrok sądu pociąga za sobą fakt, iż Euathlos jest do chwili wydania wyroku w pierwszej sprawie zobowiązany do zapłacenia za naukę.* Tak jak w przypadku rozwiązania Lenzena, i tutaj nie wiemy, co oznacza korzystny dla Euathlosa wyrok w pierwszej sprawie. Wiemy tylko tyle, że jest korzystny i na tym koniec. Podobnie, nie wiadomo, jakie konsekwencje dla Euathlosa ma niekorzystny dla niego werdykt sędziów – jest niekorzystny i już. Znane są tylko warunki, jakie muszą zostać spełnione, aby sędziowie wiedzieli, kiedy mają wydać korzystny, a kiedy niekorzystny dla Euathlosa wyrok. W przypadku postulatu *P2.1* jesteśmy postawieni wobec dokładnie tych samych problemów.

Tak więc postać postulatów *P2.0* oraz *P2.1* umożliwia uniknięcie mówienia o tym, co w paradoksie faktycznie prowadzi do sprzeczności. Wstrzymanie się od mówienia na temat treści wyroku pomaga nie dostrzec sprzeczności, co nie znaczy, że jej nie ma. W dalszej części pracy, wprowadzając postulat spójny z przyjętymi przez Åqvista założeniami, bez większego trudu, dokładnie tak jak w przypadku formalizacji Lenzena,

wyprowadzimy sprzeczność, pokazując tym samym, że jest ona nadal elementem opisu sformalizowanej przez Åqvista sytuacji.

Åqvist zastępuje także postulat *P4* dwoma kolejnymi:

$$P4.0 \quad (V(p^+) \Rightarrow O^{t+} Zb) \leftrightarrow - (V(p^+) \Rightarrow - O^{t+} Zb);$$

$$P4.1 \quad (V(p^{++}) \Rightarrow O^{t++} Zb) \leftrightarrow - (V(p^{++}) \Rightarrow - O^{t++} Zb).$$

Proponuje ponadto rozważyć tę wersję postulatu *P6*, która dotyczy drugiej rozprawy:

$$P6.1 \quad \text{Poprawne } V(p^{++}).$$

Zastosowanie nowych postulatów umożliwi Åqvistowi udowodnienie twierdzenia:

- Tw. 5* Niech $L^+ = \{P1a, P2.0, P3, P4.0, P5, P7\}$, $L^{++} = \{P1a, P2.1, P3, P5, P8, P9\}$. Wówczas,
- (i) Ze zbioru L^+ wynika formuła: *Poprawne* $V(p^+) \rightarrow G(b, p^+)$;
 - (ii) Ze zbioru L^{++} wynika formuła: *Poprawne* $V(p^{++}) \rightarrow G(a, p^{++})$.

Dowód części (i):

- | | |
|--|----------------------|
| 1. $\forall t (O^t Zb \leftrightarrow (G^{\leq t}(b, p) \ \& \ - \ Z^{\leq t} b))$ | <i>P1a, D12, P5;</i> |
| 2. $O^{t+} Zb \leftrightarrow (G^{\leq t+}(b, p) \ \& \ - \ Z^{\leq t+} b)$ | <i>1;</i> |
| 3. $- G^{\leq t+}(b, p)$ | <i>P3, P7;</i> |
| 4. $- O^{t+} Zb$ | <i>2, 3;</i> |
| 5. <i>Poprawne</i> $V(p^+)$ | <i>założenie;</i> |
| 6. $V(p^+) \Rightarrow O^{t+} Zb$ | <i>założenie;</i> |
| 7. $- \text{Poprawne } V(p^+)$ | <i>4, 6, D13;</i> |
| 8. $\text{Poprawne } V(p^+) \ \& \ - \text{Poprawne } V(p^+)$ | <i>5, 7;</i> |
| 9. $- (V(p^+) \Rightarrow O^{t+} Zb)$ | <i>6-8;</i> |
| 10. $V(p^+) \Rightarrow - O^{t+} Zb$ | <i>9, P4.0;</i> |
| 11. $G(b, p^+)$ | <i>10, P2.0;</i> |
| 12. <i>Poprawne</i> $V(p^+) \rightarrow G(b, p^+)$ | <i>5-11.</i> |

Dowód części (ii):

- | | |
|--|----------------------|
| 1. $\forall t (O^t Zb \leftrightarrow (G^{\leq t}(b, p) \ \& \ - \ Z^{\leq t} b))$ | <i>P1a, D12, P5;</i> |
| 2. $O^{t++} Zb \leftrightarrow (G^{\leq t++}(b, p) \ \& \ - \ Z^{\leq t++} b)$ | <i>1;</i> |
| 3. $G^{\leq t++}(b, p)$ | <i>P3, P8;</i> |
| 4. $O^{t++} Zb$ | <i>2, 3, P9;</i> |
| 5. <i>Poprawne</i> $V(p^{++})$ | <i>założenie;</i> |

- | | | |
|-----|---|------------|
| 6. | $V(p^{++}) \Rightarrow -O^{t++}Zb$ | założenie; |
| 7. | – Poprawne $V(p^{++})$ | 4, 6, D13; |
| 8. | Poprawne $V(p^{++})$ & – Poprawne $V(p^{++})$ | 5, 7; |
| 9. | – $(V(p^{++}) \Rightarrow -O^{t++}Zb)$ | 6–8; |
| 10. | $V(p^{++}) \Rightarrow -O^{t++}Zb$ | 9, P4.1; |
| 11. | $G(a, p^{++})$ | 10, P2.1; |
| 12. | Poprawne $V(p^{++}) \rightarrow G(a, p^{++})$ | 5–11. ■ |

Oczywistą konkluzją twierdzenia 5 jest ostateczny dla rozwiązania Åqvista wniosek:

- Wniosek (i) Ze zbioru $L^+ \cup \{P6\}$ wynika formuła: $G(b, p^+)$;
(ii) Ze zbioru $L^{++} \cup \{P6.1\}$ wynika formuła: $G(a, p^{++})$;
(iii) Ze zbioru $L^+ \cup L^{++} \cup \{P6, P6.1\}$ wynika formuła: $G(b, p^+)$ & $G(a, p^{++})$.

Na koniec Åqvist dokonuje jeszcze jednej poprawki o raczej kosmetycznej naturze, osłabiając postulat P8:

$$P8^w. G(b, p^+) \rightarrow G^{\leq t++}(b, p^+);$$

i budując zbiór L^w będący sumą $L^+ \cup L^{++} \cup \{P6, P6.1\}$, w której P8 jest zastąpiony przez $P8^w$. Okazuje się, że ze zbioru L^w wynika $G(a, p^{++})$.

Tak jak w przypadku propozycji Lenzena, także i tutaj nie grozi wyprowadzenie jakiegokolwiek sprzeczności z przyjętych przez Åqvista postulatów. Są one zbyt ubogie, bo nie nadają sensu pierwszemu wyrokowi sądowemu. Nic więc dziwnego, że zbiór przesłanek jest niesprzeczny. Uzupełniając luki w treści wyrażonej postulatami Åqvista poprzez dodanie spójnych z całością postulatów, tak jak to miało miejsce w przypadku konstrukcji Lenzena, bez trudu pokazać można, iż sprzeczność wcale nie została tu usunięta. Ona została jedynie przemilczana. Fakt ten łatwo jest zauważyć, wystarczy bowiem przyjąć te same, co w przypadku propozycji Lenzena uzupełnienia. Z postulatu P1a oraz pierwszej części (i) wniosku mamy natychmiast, że Eusthlos jest zobowiązany z chwilą ogłoszenia wyroku zapłacić Protagorasowi za naukę. Z drugiej zaś strony, skoro werdykt sądu jest dla Euathlosa korzystny, najwidoczniej nie jest on wyrokiem sądu zobowiązany do zapłaty za naukę. Tak oto sprzeczność pozostała nieusunięta.

Dzięki tej zaawansowanej formalnie analizie dowiedzieliśmy się, że... Protagoras wygrywa drugą rozprawę sądową. Jest to więc formalizacja krótkiej, można rzec lakonicznie wyrażonej opinii wygłoszonej przez Smul-

lyana, wyjaśniającej to, co powinno się zdarzyć po wytoczeniu Euathlosowi przez Protagorasa pierwszej sprawy sądowej. Problem tylko w tym, że w anegdocie nie ma mowy ani o drugiej rozprawie sądowej, ani o tym, że Euathlos nie zapłaciłby za naukę nawet wówczas, gdyby wygrał swoją pierwszą rozprawę. Można więc przyjąć, że Lenzen, Smullyan i Åqvist stworzyli sobie problem pozalogicznej, prawniczej natury, który potem rozwiązali. Jasne jest, że problem ten nie jest jednak paradoksem Protagorasa.

Jasno widać, że wszystkie uwagi sformułowane pod adresem rozwiązania Lenzena dotyczą w równym, a może i w większym stopniu propozycji Åqvista. Pojawia się jednak jeszcze jedna dodatkowa kwestia, którą artykułuje sam Åqvist, a która dotyczy postulatów *P2a* i *P2b*. Chcąc racjonalnie analizować paradoks Protagorasa i trzymając się idei reprezentowanej przez Lenzena, Åqvista i Smullyana, należałoby raczej przyjąć, że Protagoras jako wytrawny myśliciel, mimo iż późno, to jednak dostrzegł wadliwość umowy. Nie chcąc się więc narażać na śmieszność, wytoczył Euathlosowi sprawę o coś, co nie jest w jakikolwiek sposób związane z ich fatalną umową⁷. Cała sytuacja jest dla nauczyciela o tyle prosta, że Protagoras musi wytoczyć sprawę, którą na pewno przegra, po to tylko, aby spełniony został warunek umowy nakazujący Euathlosowi zapłacić pieniądze za naukę. Tak więc, dla przykładu Protagoras może oskarżyć Euathlosa o to, że ten nie ukłonił mu się na ulicy.

Na gruncie polskim propozycja Lenzena, Åqvista i Smullyana ma swój odpowiednik w podejściu Eugeniusza Grodzińskiego, który swoją analizę problemu rozpoczyna od uwagi, że umowa, jaką zawarli obaj filozofowie, mogłaby zostać zawarta również i dzisiaj [Grodziński 1983, s. 51–52]. Nie podziela więc opinii Ajdukiewicza, Lenzena, Smullyana i Åqvista uznającej, iż umowa ta implikuje sprzeczność, a więc i własną niewykonalność. W proponowanym przez siebie rozwiązaniu Grodziński przyjmuje założenie, że sprawa sądowa Protagorasa przeciwko Euathlosowi dotyczy umowy i jej przykrych dla Protagorasa konsekwencji. Ponadto zauważa, że sytuacja sądu jest dość wygodna i nie wiąże się z jakąkolwiek trudnością w orzeczeniu wyroku. Powództwo Protagorasa musi zostać oddalone, ponieważ w istocie Euathlos nie wygrał żadnej sprawy sądowej, nie musiał więc zapłacić Protagorasowi za naukę. Widać tu wyraźnie wadliwość umowy, jaką zawarli nauczyciel i jego uczeń. Wadliwość ta nie ma jednak logicznego charakteru, lecz wyłącznie, można by rzec, praktyczny. Nie nakładała ona bowiem na Euathlosa najmniejszego obowiązku podjęcia się w odpowiednim, ściśle ograniczonym przedziale czasu sprawy sądowej. Orzeka jedynie o tym, co

⁷ W anegdocie relacjonującej paradoks nie jest powiedziane, pod jakim zarzutem Protagoras wytacza sprawę swojemu uczniowi.

się stanie, jeśli Euathlos wygra, a co, jeśli przegra swą pierwszą sprawę sądową, nie gwarantując przy tym, że w ogóle dojdzie do jakiegokolwiek procesu z udziałem Euathlosa.

Istotnie, Grodziński trafnie wskazuje na fatalną formę umowy. Ma ona bowiem kształt koniunkcji dwóch okresów warunkowych:

$$(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow \neg q),$$

czyli

$$p \leftrightarrow q,$$

gdzie p i q symbolizują odpowiednio zdania *Euathlos wygra swój pierwszy proces* oraz *Euathlos zapłaci Protagorasowi za naukę*. Tym samym umowa mówi, co się stanie, gdy stanie się coś innego, nie gwarantując, że w ogóle cokolwiek się stanie. Prawdłowo sformułowana umowa winna więc gwarantować podjęcie się przez Euathlosa sprawy sądowej po ukończeniu pobierania nauki u Protagorasa. Jej postać powinna więc być następująca:

$$s \wedge (p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow \neg q),$$

czyli

$$s \wedge (p \leftrightarrow q),$$

gdzie s może wyrażać następujące zdanie: *w n dni po ukończeniu nauki u Protagorasa, Euathlos podejmie się sprawy sądowej*.

Także w innej kwestii Grodziński ma słuszość, obarczając nauczyciela winą za zawarcie niefortunnej umowy. W końcu to Euathlos przyszedł po naukę do Protagorasa, a nie Protagoras do Euathlosa.

Dalej jednak Grodziński wydaje się przechodzić do właściwego, jego zdaniem, rozwiązania paradoksu, twierdząc, iż po zakończeniu pierwszej sprawy sądowej Protagoras może natychmiast wytoczyć drugą sprawę Euathlosowi. Teraz bowiem warunki umowy są spełnione i trudno sobie wyobrazić, aby uczciwi sędziowie nie nakazali Euathlosowi zapłacenie Protagorasowi pieniędzy za naukę. Można się tylko zastanawiać, co stało się ze sprzecznością. Czy istotnie mówienie o sprzeczności można zastąpić stwierdzeniem, że błędy logiczne w procesach sądowych nie są niczym nadzwyczajnym? Przecież sprzeczność faktycznie jest w opisanej anegdotą sytuacji inferowalna.

Także Krzysztof Szymanek stoi na stanowisku, że paradoks Protagorasa nie jest żadnym paradoksem logicznym, lecz jedynie problemem o charakterze prawnym [Szymanek 2001, s. 33]. Uważa, że sąd może po prostu unieważnić niefortunną umowę.

I to podejście wydaje się w szczególności sposób nieuzasadniony. Przecież również grając w szachy i mając w związku z tym poważny problem do rozwiązania, zawsze można przewrócić stolik. Naturalnie, może się zdarzyć, że przez przypadek stolik wraz z planszą do gry w szachy i z wszystkimi stojącymi na niej figurami i pionami zostanie przewrócony. Co więcej, będzie to niewątpliwie jakieś zakończenie rozgrywki szachowej i rozwiązanie problemu. Nie można jednak z góry planować takiego rozwiązania, rozmyślając nad następnym posunięciem. Podobnie unieważnienie umowy może być skutkiem ubocznym jakiegoś przyjętego przez nas rozwiązania. Nie można go jednak z góry przyjmować jako logicznego rozwiązania paradoksu Protagorasa. Byłoby to podobne do stwierdzenia, że właściwym rozwiązaniem paradoksu krokodyla jest to, aby krokodyl pożarł dziecko. Wówczas niewątpliwie paradoks znika. Trudno więc z metodologicznego punktu widzenia uznać argumentację tego typu za właściwe rozwiązanie jakiegokolwiek paradoksu.

Jak widać, prawie wszystkie przedstawione do tej pory rozwiązania uznają, iż zawarta umowa prowadzi do sprzeczności. Z punktu widzenia logicznego problemu paradoksu Protagorasa nie różnią się one niczym od prosto sformułowanego podejścia Ajdukiewicza. Wszelkie dalsze analizy w postaci żmudnej formalizacji Lenzena i Åqvista są z logicznego punktu widzenia nieznaczającymi dodatkami. Rozwiązania te podpowiadają jedynie Protagorasowi, co ma uczynić, aby dostać od Euathlosa pieniądze. Zapoznając się z nimi, aż trudno uwierzyć w to, że żadne rozwiązanie podchodzące do paradoksu od tej właśnie strony nie przewiduje tego, iż Protagoras zwróci się po prostu z prośbą do kogoś, kto zajmowałby się odzyskiwaniem długów. Nie można typowo logicznego zagadnienia zastępować pseudo-logicznym problemem. Przecież paradoks Protagorasa polega na czymś zgoła innym. Sednem problemu nie jest to, jak Protagoras ma odzyskać pieniądze od Euathlosa, lecz to, że powstała sytuacja nosi znamiona sprzeczności, chociaż jest to, rzecz jasna, sprzeczność o językowym charakterze: bez względu na wynik procesu uczeń musi zapłacić pieniądze nauczycielowi i jednocześnie nie może ich zapłacić. Wchodząc w szczegóły natury prawnej, omija się więc właściwy dylemat, zastępując go pozornym problemem. Naturalnie, można uznać, tak jak czyni to Ajdukiewicz, iż całe zło sprzeczności tkwi w fatalnym sformułowaniu umowy i uznać ten fakt za ostateczne rozwiązanie paradoksu. Czy jednak nie jest możliwe przyjąć, iż być może cała sytuacja jest niesprzeczna, a sprzeczność jest skutkiem niewłaściwego opisu tej sytuacji?

Na tle przytoczonych rozwiązań szczególnie interesująca wydaje się być propozycja przedstawiona przez Tadeusza Pszczołowskiego:

Dziś rozróżnilibyśmy zobowiązanie pieniężne na podstawie dobrowolnej umowy od wyroku sądowego i rozumowalibyśmy w sposób następujący: Przypuśćmy, że proces wygrywa Euatlos. Sąd zwalnia go od zapłaty mistrzowi, ale w mocy pozostaje umowa. Uczeń, o ile jest człowiekiem honoru, na jej podstawie powinien zapłacić swemu nauczycielowi za jego owocny trud. Gdyby wygrał Protagoras, musiałby płacić na podstawie wyroku sądowego. Ale Protagoras, chcąc respektować swoje słowo, powinien po otrzymaniu pieniędzy oddać je, bo uczeń przegrał swój pierwszy proces [Pszczółowski 1962, s. 35].

Spróbujmy zatem, uwzględniając rozróżnienie poczynione przez Pszczółowskiego, rozwiązać paradoks, traktując go jednak, podobnie do Ajdukiewicza, jako problem logiczny, nie zaś prawniczy, finansowy czy też kwestię honorową, usuńmy więc sprzeczność poprzez poprawienie opisu całego zdarzenia.

Rozwiązanie problemu sprzeczności [Łukowski 2003]. Nieadekwatny opis rzeczywistości ma tę cechę, iż prowadzi do wniosków niezgodnych z obserwacjami. Jeśli natomiast poczynione są pewne dodatkowe założenia, może się okazać, iż wnioski nie tylko nie są zgodne z rzeczywistością, której dotyczą, lecz ponadto tworzą sprzeczny zbiór zdań.

Przypuśćmy, że dwa obiekty A i B różnią się pod względem cechy c w ten oto sposób, że A posiada cechę c , zaś B nie posiada tej cechy. Te dwa fakty obserwacyjne wyrazimy symbolicznie w następujący sposób:

z1. zdanie $c(A)$ jest prawdziwe, zaś $c(B)$ fałszywe.

A zatem prawdziwe jest zdanie $\neg c(B)$. Przyjmijmy naturalne założenie, iż wyrażenia „ A ” oraz „ B ” są odpowiednio nazwami dla obiektów A i B . Opisana do tej pory sytuacja wydaje się być czymś zupełnie zwyczajnym. Mamy oto dwa różne obiekty, różniące się pod pewnym względem, ponadto obiekty te mają dwie różne nazwy – nic bardziej banalnego. Przyjmijmy teraz dodatkowe założenie, iż z jakichś powodów obie nazwy „ A ” i „ B ” zastępujemy jedną i tą samą „ AB ”. Skutkiem czego jesteśmy skłonni przyjąć, że:

z2. $A = AB$ oraz $B = AB$.

Naturalnie, i takie sytuacje również się zdarzają, zwłaszcza wówczas, gdy cecha c różniąca oba obiekty jest mało znacząca lub nieświadomiana. Jednak operowanie wspólną dla obu różnych obiektów nazwą może się okazać niebezpieczne. Wychodząc od założeń *z1* i *z2*, dociekliwy obserwator z łatwością dojdzie bowiem do wniosku mającego paradoksalną postać:

w1. zdanie $c(AB)$ jest zarazem prawdziwe i fałszywe;

równoważną zdaniu:

w2. zdanie $c(AB)$ jest prawdziwe i zdanie $\neg c(AB)$ jest prawdziwe.

Niewątpliwie sprzeczność, do jakiej doszliśmy, jest wynikiem zastosowania zbyt ubogiego języka (*z2*), który w konfrontacji z danymi obserwacyjnymi (*z1*) stał się przyczyną sprzeczności wniosku (*w2*). Możemy powiedzieć, że język, którym się posługiwaliśmy, nie był adekwatny do rzeczywistości.

Naturalnie, aby dojść do sprzeczności, nie zawsze nieadekwatność języka musi być skonfrontowana z danymi obserwacyjnymi. Wystarczy, aby dwa różne obiekty nazwać jedną i tą samą nazwą. Nie ma przy tym większego znaczenia, czy różność ta jest stwierdzalna obserwacyjnie, czy nie. Skoro obiekty się różnią, to znaczy, że można wskazać cechę umożliwiającą rozpoznanie tej różnicy.

Przedstawiony schemat pokazujący, jak nieadekwatność języka prowadzi do sprzeczności, jest dowodem na to, jak poważne mogą okazać się skutki błędu wieloznaczności.

Powstaje naturalne pytanie, czy w przypadku paradoksu Protagorasa nie mamy do czynienia z podobnie banalną przyczyną sprzeczności. Czy jest możliwe w opisie całego zdarzenia, które być może faktycznie zaszło w przeszłości, znaleźć dwa różne obiekty występujące pod wspólną nazwą? Okazuje się, że ich znalezienie nie jest niczym szczególnie trudnym. Przecież, zwrot *zapłacić pieniądze* ma inne znaczenie wtedy, gdy mówimy o zapłacie wynikającej z zawartej umowy, inne zaś, gdy mówimy o zapłacie nakazanej przez sąd. Zamiast używać w każdym kontekście jednego i tego samego zwrotu *zapłacić pieniądze* (ew. *zapłacić za naukę*) wystarczy, aby w odpowiednich okolicznościach stosować zwrot *zapłacić wynikające z umowy honorarium* (krócej, *zapłacić honorarium*) w innych zaś *zapłacić nałożoną przez sąd grzywnę* (krócej, *zapłacić grzywnę*). Widać, że tak prosty zabieg natychmiast usuwa niepożądaną sprzeczność. Przyjmijmy bowiem, że Euathlos wygrywa proces. Zgodnie z umową, musi więc zapłacić honorarium. Jednocześnie jednak, decyzją sądu, nie zapłaci grzywny. W przypadku, gdy zwyciężcą procesu będzie Protagoras, sytuacja będzie odwrotna – Euathlos nie zapłaci honorarium, lecz będzie musiał zapłacić grzywnę. Widać ponadto, że honor Protagorasa jest uratowany. Bez względu na wynik procesu, dostanie on bowiem pieniądze od swego ucznia.

Obecnie, gdy operując już precyzyjnym językiem, jesteśmy w stanie uniknąć leżącej u podstaw paradoksu Protagorasa wieloznaczności, możemy wrócić do rozważań natury prawnej. Teraz dopiero jest sens pytać o przedmiot sprawy sądowej, o to, co sąd może, a co powinien uczynić, jaki powinien być następny krok Protagorasa itd. Bazując na przedstawionej wyżej propozycji rozwiązania, możemy stwierdzić, że istotnie, Protagoras powinien najpierw wytoczyć swojemu uczniowi sprawę o cokolwiek, co nie jest związane z ich umową, a co zagwarantuje Protagorasowi przegraną. Wówczas Euathlos, wygrywając proces, na pewno nie zapłaci grzywny, będzie jednak musiał zapłacić honorarium. Nie jest przy tym wcale przesądzone, że

Protagoras będzie musiał wytoczyć drugi proces Euathlosowi. Przecież uczeń uważał, że nie może zapłacić pieniędzy swojemu nauczycielowi, ponieważ byłoby to nielogiczne. Teraz jednak, gdy wszystko jest jasne i proste, trudno zakładać, że Euathlos dalej będzie unikał zapłacenia za naukę.

Zastanówmy się jednak, co by się stało, gdyby Protagoras zaryzykował i wytoczył sprawę związaną z ich sporem. Wówczas przedmiotem rozprawy musiałaby być postawa Euathlosa. Sprawa między nauczycielem a uczniem, jeśli miałyby rozstrzygnąć spór, do jakiego między nimi doszło, winna jednak dotyczyć nie tyle zapłaty za naukę, a właściwie jej niezaistnienia, co niepodjęcia się przez ucznia swojej pierwszej sprawy sądowej. Nie ma to jednak większego znaczenia, w jaki konkretnie sposób pozew został sformułowany. Co więcej, wynik rozprawy wcale nie jest sprawą przesądzoną. Protagoras powinien przecież przewidzieć ewentualne konsekwencje zawarcia takiej a nie innej umowy. W końcu to on był mistrzem, a nie uczniem, który w chwili zawierania umowy nie rozpoczął jeszcze nauki. Protagoras wyraźnie zapomniał o tym, aby umowa zmuszała Euathlosa do podjęcia się w określonym czasie jakiegokolwiek sprawy sądowej. Nauczyciel zawarł przecież umowę, zgodnie z którą zapłata za naukę nastąpi, jeśli zajdzie sytuacja, w której uczeń wygra swoją pierwszą sprawę. Tymczasem z umowy wcale nie wynika, aby sytuacja taka musiała zajść. To czy Euathlos wygra swą pierwszą sprawę, czy przegra zależy bowiem od tego, czy się jej w ogóle podejmie. Oznacza to, że w rzeczywistości fakt zapłacenia za naukę zależy od więcej niż jednego czynnika, podczas gdy umowa uwzględnia tylko jeden. Z drugiej strony, jasne jest, że każdy powinien dostać zapłatę za swoją pracę, a więc i Protagoras. Niech zatem, tak jak chce Åkvist [Åkvist 1981, s. 220], rozstrzygnięcie tego, czy Euathlos miał prawo ociągać się z rozpoczęciem praktyki sądowej, pozostanie problemem sądu. My rozważmy wszystkie możliwe przypadki, czyli w tych okolicznościach zaledwie dwie sytuacje: przegraną Euathlosa oraz jego wygraną. Jeśli sąd uzna rację Protagorasa, czyli orzeknie, iż nie wolno było uczniowi unikać podjęcia sprawy sądowej, to z jednej strony, Euathlos będzie musiał zapłacić grzywnę, z drugiej zaś, jako ten, który przegrał swoją pierwszą sprawę sądową, nie będzie już nigdy musiał zapłacić za naukę. Załóżmy teraz, że zgodnie z opinią Lenzena i Smullyana, sąd uzna rację Euathlosa, czyli orzeknie, iż uczeń nie musiał podejmować żadnej sprawy sądowej. Tym samym zwycięzcą zostanie uczeń i jako taki musi zapłacić honorarium za naukę, chociaż grzywny nie zapłaci. Jak widać, otrzymanie przez nauczyciela pieniędzy nie zależy od wyniku tego procesu. Ostateczny wynik rozprawy ma jedynie wpływ na to, czy uczeń zapłaci grzywnę, czy honorarium. Oczywiście, jeśli w przypadku swojej wygranej Euathlos nie zapłaci honorarium, czeka go kolejna rozprawa sądowa, którą najprawdopodobniej przegra. Przedmiotem drugiej rozprawy będzie tym razem niedotrzymanie przez Euathlosa umowy, czyli niezapłacenie za naukę.

Zaproponowane przez nas precyzyjne podejście do paradoksu Protagorasa może stać się jednak podstawą do określenia takiej sytuacji, z której wyjście wydaje się być wyjątkowo trudne. Przedstawmy więc nową wersję paradoksu, pomijając wstęp opisujący umowę, jaką zawarł Protagoras z Euathlosem, i przechodząc od razu do samego procesu:

... Protagoras wytoczył sprawę Euathlosowi oskarżając go o unikanie zapłacenia za naukę. Sąd stwierdził, że uczeń nie podejmując się jakiegokolwiek sprawy sądowej, świadomie i z premedytacją dążył do sytuacji, w której nie zapłaci nauczycielowi za naukę. Tym samym uczeń nadużył zaufania swojego nauczyciela. Świadczy to, zdaniem sądu, o winie oskarżonego i aby go ukarać za tak wyrachowane działanie na szkodę nauczyciela, sąd nakazuje, aby uczeń zapłacił Protagorasowi honorarium. Oczywiście, takie orzeczenie sądu jest równoznaczne z przegraną Euathlosa, a ponieważ przegrana ta dotyczy pierwszej sprawy Euathlosa, zgodnie z umową uczeń jest zwolniony z zapłacenia honorarium.

Czy mamy tu do czynienia ze sprzecznością i czy ta sprzeczność jest usuwalna? Ze sprzecznością mielibyśmy do czynienia wówczas, gdyby orzeczenie sądu niekorzystne dla Euathlosa zmuszało go do zapłacenia honorarium. Na pozór, w przypadku nowej wersji paradoksu mamy do czynienia z taką właśnie sytuacją. A jednak sytuacja jest zgoła inna. Zdarzyło się bowiem, że w niezaplanowany z góry sposób stolik z szachami został przewrócony. Przecież sąd wydając taki a nie inny wyrok, faktycznie unieważnił poprzednią umowę, nakazując uczniowi zapłacenie za naukę, a nie dotrzymanie umowy. Trudno zakładać, że sędziowie rozpatrujący całą sprawę i doskonale znający umowę, wydaliby niewykonalny wyrok. Ich wyrok jako akt ostateczny, także czasowo ostateczny, jest decyzją, której obie strony procesu muszą się podporządkować. Może się jednak wydawać, że sędziowie są w stanie doprowadzić rzeczywistość do sprzeczności, wydając niefrasobliwy wyrok. Załóżmy, że orzeczenie sądu jest następujące:

Skazujemy Euathlosa na wypełnienie umowy, jaką zawarł z Protagorasem.

Z brzmienia sentencji jasno wynika, że Euathlos jest przegranym. Ponadto jest to jego pierwszy proces. A zatem zgodnie z umową nie musi on zapłacić nauczycielowi za naukę. Sprzeczności, jak widać, nie ma żadnej i jest to bodaj jedyny przypadek, w którym nauczyciel nie dostałby pieniędzy od swojego ucznia. Rozważmy jednak inne z możliwych orzeczeń:

Skazujemy Euathlosa na wypełnienie umowy, jaką zawarł z Protagorasem, czyli na zapłacenie za naukę.

Wyraźnie widać, że tym razem sędziowie stworzyli sytuację sprzeczną, której sprzeczność jest, rzecz jasna, językowej natury. Przegrywający swoją pierwszą rozprawę uczeń musi jednocześnie dotrzymać warunków umowy i zapłacić

za naukę. Musi więc jednocześnie zapłacić za naukę i nie powinien zapłacić za nią. Jednak nigdy nie uda mu się zarazem zapłacić i nie zapłacić za naukę, co oznacza, że do żadnej innej sprzeczności, jak tylko językowej nie dojdzie.

PODSUMOWANIE

To, że argumentacja paradoksu Protagorasa prowadzi do sprzeczności jest faktem oczywistym. Za powszechnie uznaną tego przyczynę uchodzi wadliwie skonstruowana umowa, jaką zawarli ze sobą Protagoras i Euathlos. Takiemu stanowisku dał wyraz K. Ajdukiewicz w swoim artykule *Paradoksy starożytnych* z 1931 roku. Ponad czterdzieści lat później, w 1977 roku W. Lenzen zaproponował, jego zdaniem wolne od sprzeczności, sformalizowanie opisu sytuacji stworzonej przez Protagorasa i Euathlosa w artykule zatytułowanym *Protagoras versus Euathlus: Reflections on a so-called Paradox*. L. Åqvist wyrażając swój podziw dla dzieła Lenzena, uznał jednak, iż jego propozycja wymaga drobnych poprawek i zaproponował swoją wersję konstrukcji Lenzena. Wydaje się, iż także formalizacja Åqvista jest wolna od sprzeczności. W istocie obie propozycje są wolne od sprzeczności, lecz nie dlatego, iż jej przyczyna została odkryta, a następnie usunięta. Nieinferowalność sprzeczności w przypadku obu rozwiązań wynika z faktu, iż przyjęte tak przez Lenzena, jak i Åqvista postulaty milczą w istotnej dla paradoksu sprawie, a mianowicie tego, jak rozumieć wygraną, a jak przegraną Euathlosa, a także Protagorasa w ich pierwszym procesie sądowym. Bez większego trudu można dowieść, że obie konstrukcje formalne dają się rozszerzyć o postulaty, które wyjaśniają tę kluczową dla paradoksu kwestię. Niestety, rozszerzenie takie nieuchronnie prowadzi do sprzeczności. Jeśli rzetelnie formalizuje się opis sytuacji wynikającej z anegdoty o Protagorasie i Euathlosie, nie usuwając przy tym źródła sprzeczności, sprzeczność ta powraca.

Propozycje Lenzena, Smullyana i Åqvista łączy coś, co jest szczególnie zaskakujące. Otóż we wszystkich trzech przypadkach doszło do zastąpienia logicznego problemu sprzeczności prawniczym, żeby nie powiedzieć praktycznym problemem odebrania pieniędzy przez Protagorasa. Z tej przyczyny, ich „rozwiązania” stanowią dość niezwykły przypadek na tle wielu publikacji prezentujących rozwiązania różnych paradoksów.

Interesującą propozycję stanowi analiza Pszczołowskiego, który dostrzegł potrzebę odróżnienia zobowiązania pieniężnego na podstawie dobrowolnej umowy od zobowiązania pieniężnego na mocy wyroku sądowego. Niestety, wydaje się, że Pszczołowski nie wyciąga kluczowego dla rozwiązania paradoksu wniosku, jaki płynie z tego rozróżnienia. Prawdopodobnie, sugerując się istniejącymi analizami paradoksu, widzi konieczność odwołania się do honoru albo Euathlosa, albo Protagorasa, w zależności od tego, jaki wyrok

zapadnie w dzielącej ich sprawie. Honorowe zachowanie ucznia lub nauczyciela ma bowiem być ratunkiem przed niezgodnym z umową i dobrym obyczajem zakończeniem konfliktu.

W pracy została przedstawiona analiza pokazująca, iż faktyczną i jedyną przyczyną sprzeczności jest wieloznaczność, nie zaś wadliwość umowy. Umowa jest co prawda daleka od doskonałości, jednak nie z logicznego powodu, lecz praktycznego. Nie nakłada ona bowiem na Euathlosa obowiązku podjęcia się w pewnym ściśle określonym przedziale czasowym jakiegokolwiek rozprawy sądowej.

Z punktu widzenia zaproponowanego w pracy rozwiązania paradoksu jest on przykładem kolejnej ekwiwokacji, która już nie raz pokazała, jak wielkie potrafi wywołać zamieszanie tak w logice, jak i w filozofii.

BIBLIOGRAFIA

- Ajdukiewicz K. [1931], *Paradoksy starożytnych*, [w:] tenże, *Język i poznanie*, t. 1, PWN, Warszawa 1985, s. 135–144.
- Åqvist L. [1981], *The Protagoras Case: An Exercise in Elementary Logic for Lawyers*, [w:] *Tankar och tankefel tillägnade Zalma Puterman*, Filosofiska Studier utgivna av Filosofiska Föreningen och Filosofiska Institutionen vid Uppsala Universitet, Uppsala, s. 211–224.
- Åqvist L. [1984], *Deontic logic*, [w:] D. Gabbay and F. Guenther (eds), *Handbook of Philosophical Logic*, Vol. II, D. Reidel Publishing Company, s. 605–714.
- Grodziński E. [1983], *Paradoksy semantyczne*, IFiS PAN, Zakład Narodowy im. Ossolińskich we Wrocławiu, Wrocław.
- Lenzen W. [1977], *Protagoras versus Euathlus: Reflections on a so-called Paradox*, „Ratio” t. XIX, s. 176–180.
- Łukowski P. [2003], *Analiza dwóch paradoksów starożytnych: Euathlosa oraz Krokodyla*, „Principia” t. XXXIV, s. 169–184.
- Pszczółowski T. [1962], *Umiejętność przekonywania i dyskusji*, Wiedza Powszechna, Warszawa.
- Smullyan R. M. [1978], *What is the Name of This Book? – The Riddle of Dracula and Other Logical Puzzles*, Englewood Cliffs, Prentice-Hall. Polskie wydanie: *Jaki jest tytuł tej książki? Tajemnica Drakuli, zabawy i łamigłówek logiczne*, Książka i Wiedza, Warszawa 1998.
- Szymanek K. [2001], *Sztuka argumentacji*, PWN, Warszawa.

Piotr Łukowski

WHAT IS A PROBLEM OF THE PARADOX OF PROTAGORAS?

The ancient paradox of Protagoras had the opinion of an unsolved problem. The two solutions proposed in the 20th century by W. Lenzen and L. Åqvist are considered to be the best. In fact none of them may be treated as proper. In the paper we show that both of authors avoid contradiction solely by means of mere neglect. However quite a simple solution seems to be feasible when the paradox is approached as an amphibolic construction, thus an ambiguity.