ACTA UNIVERSITATIS LODZIENSIS
FOLIA PHILOSOPHICA 11, 1995

https://doi.org/10.18778/0208-6107.11.02

Patrice Bailhache

NA JAKICH PODSTAWACH OPIERA SIĘ MECHANIKA KLASYCZNA: ODPOWIEDŹ HISTORYKA NAUKI

1. WPROWADZENIE

Niewątpliwie zagadnienie postawione w tytule jest ważne i godne zastanowienia. Gdyby chodziło o określenie fundamentów mechaniki w sposób ogólny, to trudności, mające wówczas charakter filozoficzny, byłyby prawdopodobnie nie do przezwyciężenia. Zamierzam jednak ograniczyć się jedynie do odpowiedzi, jaką może dać historia nauki. Trudność ta nie ma jednak natury teoretycznej, lecz zasadniczo praktyczną. W istocie nie da się zawrzeć na kilku stronach ogromnej złożoności historycznego rozwoju mechaniki. Toteż przyjmę następującą metodę wykładu. Spośród dowodów i rozważań dotyczących praw mechaniki przywołam tylko kilka najwybitniejszych i najbardziej znanych; pokażę, że rozumowania, na których się one opierają, wcale nie zasługują na lekceważenie, przeciwnie: wiele mogą one nas nauczyć, a nawet należy uznać, że jest to jedyna droga prowadząca do stworzenia „filozofii" mechaniki, jeśli w ogóle jest to możliwe.

Zatem najpierw omówię dowód na zasadę dźwigni Archimedesa, a następnie przeskakując kilka stuleci poruszę problematykę zasad równi pochyłej i rozkładu sił Stevina. Wraz z takimi uczonymi, jak Newton i d'Alembert, będziemy mogli zaobserwować, w jaki sposób ewoluowały poglądy na ten temat, mimo że przez długi czas obie te zasady stanowiły podstawę mechaniki. Równocześnie będzie to okazja do pokazania sposobu, w jaki mechanika, pierwotnie nauka niemal równie „czysta" jak matematyka, wraz z pojawieniem się Archimedesa zaczęła być uznawana za dziedzinę po części eksperymentalną. Równolegle rozważymy także inną zasadę, a mianowicie zasadę prac wirtualnych. Zobaczymy jak dużego znaczenia nabiera ona u Lagrange'a, choć niemal natychmiast ulega ona zakwestionowaniu, żeby przywołać tylko przykład Poinsota.

2. ARCHIMEDES A ZASADA DŹWIGNI

Pochodzący z III w. p.n.e. dowód Archimedesa znajduje się w traktacie *O równowadze równi pochyłych czy też środków ciężkości równi pochyłych*. Składa się on z sześciu „twierdzeń" poprzedzonych szeregiem „wymogów", czyli postulatów wyrażonych słowami: „wymagamy, aby...". Jednak gdy czytamy ten tekst po raz pierwszy, odnosimy wrażenie, że liczba tych wymogów i twierdzeń przesłania prostotę oraz pomysłowość samego dowodu. Tymczasem zasadnicze jest tu pierwsze twierdzenie pierwszego wymogu: równe ciężary zawieszone w równej odległości od punktu podparcia są w stanie równowagi. Właśnie to nazwę w sposób niezbyt właściwy, lecz gwoli wygody, *prawem równowagi*.

Na rysunku pokazano sposób, w jaki należy rozłożyć ciężary 3 i 4 odpowiednio na 6 i 8 równoważących się ciężarów. Zgodnie z prawem równowagi całość znajduje się w stanie równowagi. W rzeczywistości Archimedes nie przedstawia tego przykładu, lecz od razu przyjmuje ogólny przypadek dwóch równomiernych ciężarów (łatwo można sobie wyobrazić sposób, w jaki można uogólnić przedstawiony rozkład). W ostatnim zaś twierdzeniu uogólnienie to rozszerza o przypadek dwóch nierównomiernych ciężarów (rozumowanie to nie interesuje nas tutaj, gdyż odnosi się w znacznie większym stopniu do teorii liczb rzeczywistych niż do mechaniki).

Oryginalny tekst grecki sprawia w tym miejscu wrażenie tak ścisłego, że ów słynny dowód musi wywrzeć wielkie wrażenie na tym, kto styka się z nim po raz pierwszy. Zawiera on jednak założenia, które podważają jego wartość, a które z biegiem lat zostały rzeczywiście zauważone (przez Huygensa, Fouriera, Langrange'a, Macha ...). Najsłabszym punktem tego dowodu jest to, że warunkiem rozkładu jest równoważenie się dwóch identycznych ze sobą ciężarów z jednym ciężarem o podwójnej wartości, umieszczonym na wertykalnej symetralnej dwóch danych ciężarów. Otóż prawo równowagi stwierdza jedynie, że identyczne ze sobą ciężary równoważą się na symetralnej, lecz nie wskazuje wartości ich wypadkowej w punkcie podparcia, co należałoby koniecznie dołączyć do postulatów Archimedesa. Niestety, jak wykazuje to Fourier[1], ten nowy „wymóg" jest logicznie równoważny z samą zasadą dźwigni; w rezultacie wydaje się, że Archimedes, pomijając to co zasadnicze, stworzył jedynie pozorny dowód.

Podczas gdy rzekome rozwiązanie przedstawione przez Huygensa staje się przedmiotem tej samej krytyki[2], rozwiązania Fouriera i Langrange'a, mające charakter czysto geometryczny, są bardzo pomysłowe. Rozwiązanie Fouriera polega na sprowadzeniu uzupełniającego postulatu równowagi trzech równych sił współpłaszczyznowych tworzących kąt 120° w tym samym punkcie[3].

Rozwiązanie Langrange'a jest jeszcze bardziej proste: pokazuje mimochodem, że wielkiemu „analitykowi" nie brakowało intuicji geometrycznej, wówczas gdy była mu ona potrzebna[4].

3. SIMON STEVIN A PRAWO RÓWNI POCHYŁEJ ORAZ ROZKŁADU SIŁ

Problem równowagi ciała znajdującego się na równi pochyłej Stevin rozwiązuje za pomocą nader oryginalnej metody, a mianowicie metody zakładającej niemożliwość istnienia *perpetuum mobile*.

Krótko można jego dowód przedstawić następująco: szereg jednakowych i w równym stopniu oddalonych od siebie kul może przemieszczać się po trójkącie ABC (AC poziome, AB i CB wertykalne), takim że AB = 2BC i że długości jego boków mogą zawierać odpowiednio 4 i 2 kule (pozostałe kule umieszczone są na boku AC). Stevin stwierdza, że działanie 4 kul na AB powinno równoważyć działanie 2 kul na BC. Rzeczywiście, gdyby tak nie było, jedne kule przeważyłyby nad drugimi, a szereg zacząłby się przesuwać (działanie kul umieszczonych na AC nie miałoby żadnego znaczenia). Jednakże obrót spowodowałby jedynie to, że każda kula zostałaby zastąpiona przez następną, a ponieważ te same przyczyny wywołują te same skutki, „ruch

[1] J. Fourier, *Mémoire sur la statique*, „Journal de l'Ecole Polytechnique" 1798, n⁰ 5, s. 51–52.

[2] W trosce o zwięzłość rezygnuję z przedstawienia tego rozwiązania. Por. E. Mach, *La méchanique. Exposé historique et critique de son développement*, trad. E. Bertrand, Paris 1904 (wydanie oryginalne w języku niemieckim ukazało się w 1883 r.). Nowe wydanie (J. Gabay, 1987, s. 22–25) jest fotokopią wydania z 1904 r.

[3] J. Fourier, *Mémoire...*, s. 50–51.

[4] J. L. de Lagrange, *Mécanique analytique*, t. 1–2, Blanchard, Paris 1965 (nowe wydanie). Cytaty czerpię z tego wydania; zob. *ibidem*, t. 1, s. 4. Drugie wydanie tej pracy z 1811 r. zawiera wiele przypisów, zwłaszcza na pierwszych stronach, poświęconych historii zasad.

ów nie miałby końca, co z kolei jest absurdem”[5]. Toteż powinna istnieć tutaj równowaga, co powoduje, że działanie jednej kuli na AB jest dwa razy mniejsze niż działanie jednej kuli na BC. Wychodząc od tego wyniku Stevin udowadnia teoremat rozkładu sił, a w każdym razie w tym przypadku, w jakim składowe są prostopadłe względem siebie.

4. POZOSTAŁE DOWODY NA PRAWO ROZKŁADU SIŁ

Należy zauważyć, że Stevin przeprowadza swój dowód odwołując się wyłącznie do *statyki*: cały dowód opiera się ostatecznie na negacji możliwości istnienia *perpetuum mobile*. Nie jest to jedyne możliwe rozwiązanie. Można również, jak uczynił to Newton w XVII w., wyprowadzić prawo rozkładu sił na podstawie *dynamiki*: „Ciało wprawione w ruch przez dwie siły przebiega wskutek ich połączonego działania przekątną równoległoboku w tym samym czasie, w jakim przebiegałoby osobno jego boki”[6]. Ponieważ ruch dokonujący się w „pierwszej chwili” jest proporcjonalny do siły, zdanie to oznacza, że siła wypadkowa stanowi diagonalną sił składowych[7].

W XVIII w. powstają jednak nowe dowody o charakterze zarówno geometrycznym, jak i analitycznym, a z drugiej strony, o charakterze czysto statycznym. Do ich powstania przyczyniła się w znacznym stopniu rozprawa Daniela Bernoullego z 1726 r., która w następnym wieku zainspirowała d’Alemberta, a nawet Poissona i Cauchy’ego. Metoda dowodzenia, zarówno u Bernoullego, jak i u d’Alamberta, polega na sprowadzeniu wszystkich przypadków do przypadku dwóch równych sił. Przyjrzyjmy się rozumowaniu d’Alemberta (1769); ponieważ a jest natężeniem danych sił a 2α ich kątem,

[5] S. Stevin, *Oeuvres* (1586), tłum. fr. z 1634 r., wyd. A. Girard według *Hypomnemata mathematica* (1608), łacińskiego tłumaczenia wraz z uzupełnieniami oryginału flamandzkiego, opublikowanego w Lejdzie w 1586 r. Cyt. za: Dugas, *Histoire de la mécanique*, Paris 1950, s. 119 i n.

[6] Cyt. przez Dugas, *Histoire...*, s. 198.

[7] Można w pewnej mierze pokazać, iż ten typ dowodzenia występuje już u Arystotelesa (384–322 p.n.e.). Rzeczywiście *Problemy mechaniki* napisane przez jednego z jego następców, stwierdzają, że „jeśli ciało ruchome porusza się równocześnie ruchem podwójnym, takim że przemierzane przestrzenie są jednocześnie w niezmiennym stosunku wobec siebie, to owo ciało ruchome poruszy się po przekątnej równoległoboku, którego boki stanowią dwie linie, zaś długości tych boków są w tym samym stosunku” (cyt. za: N. Brillouët, *Le parallélogramme des forces, son étude fonctionnelle au XVIII^e siècle*, „Sciences et techniques en perspective” 1984, t. 1–4, s. 65). Dodając prawo dynamiki arystotelesowskiej mówiące o proporcjonalności prędkości do siły, z myśli Arystotelesa można wywieść zasadę rozkładu sił; należy jednak zauważyć, iż zasada ta nie została w sposób jednoznaczny wyrażona ani w *Problemach mechaniki*, ani w tekstach samego Stagiryty.

to wypadkowa r, na mocy jednorodności[8], powinna być proporcjonalna do a. Mamy zatem: $r = af(\alpha)$, a wszystko jest równoważne z określeniem funkcji f. Odwołując się do własności asocjacyjności, wymienności, ... d'Alembert pokazuje, że funkcja ta winna potwierdzić równanie:

$$f(x-e) + f(x+e) = f(e)f(x).$$

Rozwiązał już bowiem analogiczne równanie funkcjonalne, badając krzywą, jaką tworzy drgająca cięciwa. W ten właśnie sposób dochodzi do $f(x) = 2\cos x$ odpowiadającemu prawu rozkładu sił.

Można początkowo poczuć się zdezorientowanym, gdy u takiego autora jak d'Alembert, a w jeszcze większym stopniu u jego następców, napotykamy ten ostatni typ dowodzenia, polegający na *sprowadzeniu* mechaniki do geometrii. W okresie XVIII i XIX w. stopniowo potwierdza się bowiem nieredukowalnie empiryczny charakter mechaniki (aczkolwiek w znacznym stopniu występuje w niej matematyczne *a priori*). Do problemu tego wkrótce powrócę. Tymczasem pominę go, przechodząc do omówienia innej zasady, którą zawdzięczamy d'Alambertowi, zasady mało dzisiaj znanej, która odegrała jednak ważną rolę w powstaniu nauki o ruchu na przełomie XVIII i XIX w.

5. ZASADA RUCHU ZWANA „ZASADĄ D'ALEMBERTA"

Zasada ta została wypowiedziana w *Traité de dynamique* (1743). Traktat ów przedstawia ogólną metodę pozwalającą rozwiązać cały szereg problemów, jak np. najbardziej znany problem wahadła złożonego, który wcześniej otrzymał rozwiązania z pewnością pomysłowe, lecz nie dające się uogólnić (najbardziej znanym jest niewątpliwie rozwiązanie przedstawione przez Huygensa[9]).

D'Alembert rozpoczyna uwagą, iż chodzi mu jedynie o ruchy powstałe w rezultacie uderzenia bądź oddziaływania sznurka oraz pręta, a nie w następstwie wzajemnego przyciągania (albowiem przypadek ten zdaniem d'Alemberta został w wystarczającym stopniu opracowany przez Newtona).

PROBLEM OGÓLNY

Załóżmy, że istnieje układ ciał [...], i załóżmy, że każdemu z tych ciał nadaje się osobno ruch, któremu jednak nie może ono podlegać z powodu działania pozostałych sił; należy określić ruch, jaki każde z ciał powinno uzyskać[10].

---

[8] Można też wskazać inne powody; por. N. Brillouët, *Le parallélogramme...*, s. 76.

[9] Zob. np. Dugas, *Histoire...*, s. 178 i n.

[10] J. Le Rond d'Alembert, *Traité de dynamique*, t. 1, Paris 1921, s. 82 (reedycja w dwóch tomach).

Rozwiązanie d'Alemberta jest następujące. A, B, C, ... oznaczają ciała, zaś a, b, c, ... oznaczają ruchy, w jakie *wprawia* się ciała, czyli wektory prędkości ciał, skoro przyjmuje się, że z osobna są one *swobodne* (czym nie są gdyż stanowią *układ*). Natomiast a, b, c, ... oznaczają ruchy *rzeczywiście uchwytne (pris)* (odmienne od a, b, c, ... z powodu istnienia więzów między ciałami). D'Alembert dzieli ruchy, w jakie ciała zostają wprawione, na uchwytne i pozostałe, nazwane przezeń α, β, K, ...[11]. Podział ten jest zawsze możliwy, a *zakładając, że skutki, tak jak i przyczyny łączą się w sposób linearny*, (czego d'Alembert nie dopowiada), oddziaływanie ruchów uchwytnych a, b, c, ... powoduje same te ruchy, a w ten sposób wywołuje te same skutki, co oddziaływanie ruchów a, b, c, ...; zatem oddziaływanie ruchów α, β, K, ..., które oznaczają różnice wektorowe dwóch grup poprzednich ruchów, nie powoduje żadnego ruchu, przeciwnie, zachowuje układ w stanie równowagi. Wychodząc od tego, można sobie wyobrazić w jaki sposób d'Alembert urzeczywistnia tę zasadę, ażeby znaleźć ruch uchwytny, np. poprzez wahadło fizyczne poddane oddziaływaniu różnych sił. Zobaczymy za chwilę, jak w swej *Mécanique Analytique* wykorzystuje ją Lagrange oraz jakiej krytyce użytek ów poddać mógł – jak sam sądził – Poinsot. Z punktu widzenia historycznego rozwoju mechaniki ważne jest, abyśmy zauważyli, że zasada d'Alemberta zakłada ustanowiony *układ mechaniczny*, całość materialnych, połączonych ze sobą punktów.

6. LAGRANGE, MÉCANIQUE ANALYTIQUE ORAZ ZASADA „PRĘDKOŚCI WIRTUALNYCH"

Lagrange porządkuje i racjonalizuje mechanikę znacznie lepiej niż d'Alembert i Euler:

> Zaproponowałem sprowadzenie[12] teorii tej nauki i sztuki rozwiązywania wynikających z niej problemów do formuł ogólnych, których proste rozwinięcie umożliwia sformułowanie wszystkich równań niezbędnych do rozwiązywania każdego problemu"[13].

[11] Te ostatnie odpowiadają ruchom, które Carnot nazywa **ruchami straconymi**; zob. L. Carnot, *Essai sur les machines en général*, Paris 1783.

[12] Zarówno projekt, jak i termin „sprowadzenia" (w oryginale fr. *réduire*) nie są czymś nowym. Por. zwłaszcza J. Le Rond d'Alembert, *Traité de dynamique...*, s. XVII: „[...] nie byliśmy na tyle uważni, aby sprowadzić zasady tych nauk, tj. *matematyki, algebry, geometrii i mechaniki*, do mniejszej liczby, ani [...]"; por. także L. Carnot, *Essai...*, s. 12, gdzie autor mówi o zasadach mechaniki, nie określając bynajmniej, o którą konkretnie mu chodzi: „i być może z tego powodu nie istnieje jeszcze jakakolwiek zasada, która – jako jedyna i niezależna od pozostałych – mogłaby nadać ścisłemu dowodowi ogólność pozwalającą rozwiązać różne problemy [...], czyli sprowadzić je wszystkie do kwestii arytmetyki i geometrii – co jest rzeczywistym przedmiotem mechaniki".

[13] *Avertissement de la première édition*, [w:] J. L. de Lagrange, *Mécanique...*, s. 1.

„W dziele tym nie znajdziemy żadnych rysunków", dodaje autor, jak gdyby nieobecność ta była bezspornym triumfem Analizy. Mówiąc „sprowadzić mechanikę do Analizy", Lagrange nie zamierza z pewnością *wyeliminować* tego wszystkiego, co stanowi o swoistości mechaniki. Jego metoda polega raczej na próbie ujęcia tej swoistości za pomocą możliwie najmniejszej liczby zasad, po to, by następnie wyprowadzić z nich drogą rachunków możliwie największą liczbę wniosków dotyczących porządku mechaniki.

Lagrange stwierdza, iż zasady te w odniesieniu do statyki można „sprowadzić do trzech zasad: do zasady *dźwigni*, zasady *rozkładu sił* i zasady *prędkości wirtualnych*". W drugim wydaniu *Mécanique analytique*[14] sporządza on obszerny przegląd historyczny tych zasad. Właśnie ostatnią spośród nich i tylko ją winno się uznać za podstawę mechaniki. Ponieważ zasada ta jest nieco mniej znana niż dwie poprzednie[15], przytoczymy zatem to, co mówi o niej sam Lagrange:

> Przez *prędkość wirtualną* winno się rozumieć prędkość, jaką uzyskać może ciało zachowujące równowagę w przypadku, gdy utracona zostaje owa równowaga, czyli prędkość, jaką ciało faktycznie uzyskuje w pierwszej chwili swojego ruchu; a zasada, o której mowa, polega na tym, że siły znajdują się w stanie równowagi wówczas, gdy pozostają w stosunku odwrotnym do prędkości wirtualnych, mierzonych zgodnie z kierunkiem tych sił (J. L. de Lagrange, *Mécanique analytique*, s. 17–18).

Z punktu widzenia historii nauki pouczające jest porównanie dwóch wydań *Mécanique analytique*, które ukazały się jeszcze za życia autora. Lagrange stwierdza najpierw, że:

> [...] (zasadę prędkości wirtualnych) cechuje prostota, jaką chciałoby się przypisać zasadzie podstawowej [...] (s. 19).

ażeby następnie w 1811 r. dodać, że:

> W odniesieniu do natury zasady prędkości wirtualnych należy zgodzić się, że sama przez się nie jest ona wystarczająco oczywista, aby ustanowić ją jako zasadę pierwotną (s. 21).

W konsekwencji, nawiązując do dowodów tej zasady przeprowadzonych na podstawie zasady dźwigni bądź zasady rozkładu ciał, Lagrange przedstawia nowy dowód oparty na „innej ogólnej zasadzie" – na zasadzie *kół pasowych*[16]. Dowód ów jest powtórzeniem dowodu przedstawionego w rozprawie, którą Lagrange opublikował w „Journal de l'Ecole Polytechnique"

---

[14] Uzupełnia również dowód zasady równi Archimedesa w sposób przedstawiony wcześniej.

[15] Odpowiada ona temu, co dzisiaj nazywa się teorematem prac wirtualnych.

[16] Począwszy od pierwszego wydania Lagrange przedstawia jednak coś, co można by nazwać *pozorem dowodu*, rozciągając zasadę prędkości wirtualnych zastosowaną do dwóch sił na przypadek, gdy zasada ta zostosowana zostaje do dowolnej liczby sił (J. L. de Lagrange, *Mécanique...,* chap. 2, § 1, s. 24–26).

w 1798 r.[17] Odwołuje się on do przemyślnego mechanizmu, pozwalającego sprowadzić wszystkie zastosowane w układzie siły do jednego ciężaru. Inspiracją dla tego typu dowodzenia były prace Carnota, Toricellego, a nawet Kartezjusza.

Ażeby przejść od statystyki do mechaniki, Lagrange wykorzystuje przedstawioną już wcześniej zasadę d'Alemberta. W układzie ciał, odłączając momenty wielkości ruchu md^2x/dt^2, ... (ruchy uchwytne) od momentów danych sił działających (ruchy nadane ciałom), osiąga się sumę momentów utrzymujących układ w równowadze, zatem zerową (wedle zasady prędkości wirtualnych) sumę momentów, co umożliwia sformułowanie równania ruchu. W ten właśnie sposób Lagrange opiera całą mechanikę na układzie: *zasada prędkości wirtualnych* + zasada d'Alemberta.

Jest oczywiste, że przytoczone twierdzenia oraz dodanie dowodu zasady prędkości wirtualnych w *Mécanique analytique* ujawniają zmianę poglądu Lagrange'a na zasady mechaniki. W rzeczywistości stanowią one konsekwencję dyskusji teoretycznej, w której uczestniczyli prawdopodobnie wszyscy uczeni francuscy (a nawet kilku spoza Francji) zajmujący się mechaniką: warto wspomnieć tutaj takie nazwiska, jak: Carnot, Fourier, Prony, Laplace, Ampère i Poinsot. Autorytet naukowy Lagrange'a wyjaśnia z pewnością owo skupienie zainteresowań na problemie zasad mechaniki. Uznanie przezeń w 1788 r. zasady prędkości wirtualnych i zasady d'Alemberta za podstawę tej nauki[18] wywołało liczne refleksje. Zbadajmy teraz na czym polegały najciekawsze

[17] Obok niego, w tym samym zeszycie, znajduje się także traktat Fouriera poświęcony statyce; do traktatu tego, przywołanego już odnośnie do dowodu Archimedesa, wkrótce powrócę.

[18] Parę złożoną z *zasady prędkości wirtualnych* oraz *zasady d'Alemberta* L a g r a n g e przyjmuje za podstawę mechaniki począwszy od 1763 r. w *Recherches sur la libration de la lune* (nagroda Królewskiej Akademii Nauk w Paryżu, t. 9, 1764; rozprawa ta zamieszczona została w *Oeuvres*, t. 6). Pewne ustępy tej rozprawy, dotyczące zasady prędkości wirtualnych, można odnaleźć w niemal dosłownym brzmieniu w *Mécanique analytique*. Wcześniej, zamiast niej Lagrange stosował zasadę najmniejszego działania. Rzeczywiście, w *Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies* „Miscellanea Taurinensia" 1760–1761) przedstawił on swój słynny rachunek wariacyjny, którego konieczne – zdaniem autora – rozwinięcie znalazło swój wyraz w *Application de la méthode exposée dans le mémoire précédent à la solution de différents problèmes de dynamique* (oba te traktaty są zamieszczone w *Oeuvres*, t. 1). *Wielkość dzialania*, (tj. wszystkie prędkości zwielokrotnione przez elementy trajektorii) stanowiła „dobrą" funkcję zastosowania rachunku wariacyjnego. Lagrange nie zachował jednak tej podstawy mechaniki, co można wyjaśnić dwojako. Z jednej strony, zasada najmniejszego działania jest zasadą ruchu, podczas gdy zasada prędkości wirtualnych o charakterze statycznym pozwala łatwo uporać się z problemem równowagi, ażeby następnie dojść do dynamiki. Z drugiej strony, zasada najmniejszego działania, nawet w postaci jaką nadaje jej Lagrange, jest mniej ogólna niż zasada prędkości wirtualnych połączona z zasadą d'Alemberta (Euler, którego Lagrange cytuje na początku swojego traktatu z 1760 r., ograniczył się do przypadku ciała wprawionego w ruch przez siły centralne). *Mécanique analytique* pokazuje jasno, że zasada najmniejszego działania stosuje się jedynie do przypadku, w którym istnieje działanie sił niezależnie od czasu (oraz zakłada, że więzy powinny mieć charakter *holonomiczny*, i niezależny od czasu). Przeciwnie, zasada prędkości wirtualnych połączona z zasadą d'Alemberta stosuje się nawet

spośród nich i zwróćmy uwagę na dowody zasady prędkości wirtualnych, „konkurencyjne” wobec dowodów Lagrange’a.

7. POZOSTAŁE DOWODY ZASADY PRĘDKOŚCI WIRTUALNYCH

Dowody Lazare’a Carnota. Traktaty Carnota dotyczące mechaniki przedstawiają dwa dowody zasady prędkości wirtualnych. Pierwszy, datowany na 1783 r., powstał z pewnością w odpowiedzi na ukazanie się *Mécanique analytique* w 1788 r. Jednakże zasadą prędkości wirtualnych jako podstawą mechaniki Lagrange posłużył się już w 1763 r. w rozprawie o libracji księżyca[19]. Zatem możliwe jest, że rozprawę tę Carnot już znał. Ten pierwszy dowód, któremu zresztą sam jego autor odmówił absolutnej ścisłości, jest uogólnieniem zasady Toricellego (dwa ciężary są w stanie równowagi wówczas, gdy ich środek ciężkości nie może się już obniżyć). Ażeby wytworzyć dane siły Carnot odwołuje się do mechnizmu kół pasowych; odwołanie to czyni z jego dowodu prefigurację dowodu Fouriera (a dokładnie, jego trzeciego dowodu, zob. dalej), a także dowodu Lagrange’a. Od dowodów tych jest on jednak gorszy, gdyż uogólnienie zostało jedynie zarysowane. Trudno powiedzieć, czy Carnot wywarł jakiś wpływ na Fouriera i Lagrange’a. Jego drugi dowód jest jednak całkowicie oryginalny, a poza tym nie znalazł naśladowców. Dowód ów, oparty na mechanistycznej metafizyce, leżącej u podstaw poglądów Carnota (siła jest pojęciem fałszywym; nie powinno się utrzymywać, że prawa *przekazu ruchu* między siłami a uderzeniem są jedynym dostatecznie znanym zjawiskiem mechanicznym – wkrótce do tego powrócę) jest nazbyt długi, aby go w całości przytoczyć. Z zasady prędkości wirtualnych Carnot czyni *teoremat* i być może właśnie to należy uprzytomnić sobie, ażeby zrozumieć dalszy ciąg „dyskusji”.

Rozprawa Fouriera (1789). Tekst ów przedstawia *trzy* różne dowody. Pierwszy, rozpatrujący różne przypadki o wzrastającym stopniu ogólności, odnosi się do brył stykających się ze sobą bądź połączonych sznurkami, a ostatecznie nieściśliwymi cieczami. Drugi zastępuje dany układ mechaniczny, czyli jego więzy, zespołem dźwigni wytwarzającym te same przesunięcia wirtualne. Następnie Fourier objaśnia zasady mechaniczne, na jakich opierają się jego dowody; zasady dźwigni i rozkładu sił. Ponieważ druga zasada może zostać wyprowadzona z pierwszej, jak sam wyjaśnia, wszystko opiera się ostatecznie na zasadzie dźwigni. Pod koniec rozprawy usiłuje nawet

do układów, w których nie ma wzajemnej zależności sił, i w których więzy nie mają charakteru holonomicznego.

[19] Por. przyp. 18.

rozszerzyć granice oczywistości wymaganej przez dowód. Jego styl przypomina wówczas styl Archimedesa, którego dowód zasady dźwigni – jak już widzieliśmy – przejmuje i uzupełnia. Ostatecznie powstaje równowaga trzech równych i współpłaszczyznowych sił tworzących kąt 120°; uprawomacnia ją – tak jak w całkowicie archimedesowym przypadku dwóch równych sił, oddalonych w równej mierze od punktu oparcia – zasada racji dostatecznej.

Trzeci dowód Fouriera polega na dołączeniu do układu mechanizmu dźwigni i kół pasowych w taki sposób, że siły powstają wskutek działania ciężarów, które w wirtualnym naruszeniu równowagi wznoszą się bądź opadają z tej samej wysokości; są to dane siły działające, nie zaś więzy podlegające teraz przemieszczeniu, a skoro algebraiczna suma ciężarów nie może zmniejszyć się, to powstaje rzeczywista równowaga, co prowadzi do zasady prędkości wirtualnych.

Dowód Prony'ego[20]. Prony, który był profesorem mechaniki w Ecole Polytechnique reprezentuje niższy poziom teoretyczny niż pozostali uczeni. Nie powinno się jednak pomniejszać jego znaczenia, gdyż był nauczycielem Poinsota (o którym będzie jeszcze mowa), zresztą nie tylko w tej szkole, lecz – później – również w Ecole des Ponts et Chaussées, w której jako dyrektor miał okazję przyznać mu nagrodę w dziedzinie mechaniki. Przedstawię pokrótce jego rozumowanie. Wychodzi on od zasady rozkładu sił, odnosząc ją w pierwszym rzędzie do brył sztywnych, następnie zaś do układu liniowego (ciała punktowe połączone sznurkami). Zachęcał uczniów Ecole Polytechnique do czytania włoskiej rozprawy florentyńskiego rycerza nazwiskiem Fossombroni, poświęconej w całości zasadzie prędkości wirtualnych. Rozprawa ta jest również na niskim poziomie teoretycznym.

(Pseudo)dowód Laplace'a. Mylą się nawet najwięksi ludzie. Przykładem tego jest podejście Laplace'a do zasady prędkości wirtualnych[21]. Rozumowanie jest raczej nużące i zawiłe, lecz autor *Mécanique celeste* cieszył się takim prestiżem, iż trzeba było wnikliwości Poinsota, ażeby pokazać całkowicie iluzoryczny charakter tego dowodu[22]. Później także inni dali się nabrać na ów fałszywy dowód[23]. Nie miejsce tutaj na analizę błędów Laplace'a. Przedstwię jedną czy dwie cechy charakterystyczne dla jego pseudodowodu, które mogły się stać przedmiotem interesującej nas dyskusji.

[20] *Sur le principe des vitesses virtuelles et la décomposition des mouvements circulaires*, „Journal de l'Ecole Polytechnique" 1798, n⁰ 5 (równocześnie z traktatem Fouriera i dowodem Lagrange'a).

[21] Ten pseudodowód znajduje się w rozdziale 3 księgi I Laplace'a; zob. P. S. de Laplace, *Traité de mécanique céleste*, Paris An VII (1799–1823).

[22] Stało się to dopiero w 1838 r., a więc prawie czterdzieści lat później, w „Journal de Mathématiques pures et appliquées" („Journal de Liouville"), t. 3, s. 244–248.

[23] W szczególności E. Jouguet, *Lectures de mécanique*, 2^{e} partie, Paris, s. 307–308, przyp. 5.

[...] dwa punkty materialne – stwierdza Laplace – [...] mogą oddziaływać na siebie jedynie przemieszczając się po łączącej je prostej[24].

Całe to rozumowanie opiera się na rozkładzie danych sił działających w różnych kierunkach, a szczególnie wedle *odległości* między ciałami (punktowymi) układu. Zobaczymy wkrótce w jaki sposób idee te zostały podjęte przez Poinsota, a w jaki skrytykowane przez Lagrange'a.

Dowód Ampère'a. Jest on współczesny rozprawie Poinsota, lecz ściślej mówiąc – nieco późniejszy[25], a ponieważ zawiera uwagi, które zdają się dotyczyć pewnych wyborów bądź pewnych stosowanych przez Poinsota metod, być może należałoby przedstawić go zaraz po omówieniu tej rozprawy. Do uwag tych wkrótce powrócę. Jeśli zaś chodzi o sam dowód, to ujmuje on układ w taki sposób, jak gdyby miał on tylko jeden stopień swobody (stopień odpowiadający przemieszczeniom wirtualnym), a także rozpatruje przekaz momentów ruchów danych sił działających w mechanizmie punktów zmuszonych do przesuwania się po krzywych; wszystkie siły są w ten sposób równoważne pozostałym zmuszonym do przemieszczania się w tej samej ilości po tej samej prostej. Znajdujemy tu coś, co odpowiada jedynemu ciężarowi, który zarówno zdaniem Fouriera, Lagrange'a, jak i Carnota może się obniżyć. Należy jednak stwierdzić, że przedstawione wyliczenia są nieco nużące, a całość niezbyt oryginalna[26].

8. KRYTYKA LAGRANGE'A DOKONANA PRZEZ POINSOTA ODPOWIEDŹ LAGRANGE'A

Bardziej oryginalna jest krytyka, jakiej Poinsot poddał zasadę prędkości wirtualnych oraz zastosowanie jej przez Lagrange'a jako podstawy mechaniki. Ażeby dobrze uchwycić sens tej krytyki, należy powrócić do tego zastosowania w *Mécanique analytique*. Powiem o *metodzie mnożnika* wyłożonej w czwartym rozdziale pierwszej części.

Załóżmy:

$$Pdp + Qdp + Rdr + ... = 0,$$

[24] P. S. de Laplace, *Traité de mécanique...*, t. 1, s. 37.

[25] Prace Ampère'a i Poinsota ukazały się w kwietniu 1806 r. w „Journal de l'Ecole Polytechnique", n⁰ 13; rozprawa Poinsota w jej wersji początkowej była jednak czytana w Akademii 14 stycznia 1805 r., zaś rozprawa Ampère'a – 11 lutego tego samego roku.

[26] Są to męczące wyliczenia, np. dotyczące znalezienia warunku równoważności dwóch sił działających na dwa punkty połączone sztywnym prętem, mające opisać dwie krzywe. Por. nasze wydanie *Théorie générale* Poinsota [w:] P. Bailhache, *Louis Poinsot. La théorie générale de l'équilibre et du mouvement des systèmes*, Paris 1975, s. 182 (wyd. oryginalne w „Journal de l'Ecole Polytechnique" 1806, n⁰ 13 oraz (w aneksie do *Eléments de statique*). Natomiast Jouguet, przeciwnie, uważa dowód Ampère'a za „bardzo oryginalny" (*ibidem*, s. 309).

równanie zasady prędkości wirtualnych[27]. I załóżmy:

$$L(x, y, z, x', y', z', ...) = 0$$
$$M(x, y, z, x', y', z', ...) = 0$$
$$... \quad ...$$

oraz to samo w sposób bardziej ogólny, w postaci różniczkowej[28]:

$$dL = 0, \ dM = 0, \ ...$$

równania c związków między punktami n układu, dane x, y, z, x′, y′, z′, ... Z tych c równań można by wyprowadzić 3n – c zmiennych niezależnych, które określiłoby się następnie, zrównując z 0 współczynniki wariacji tych 3n – c zmiennych w formule zasady prędkości wirtualnych, w której dp, dq, dr, ... zostałyby wyrażone jedynie w zależności od tych 3n – c zmiennych. Rozwiązałoby to problem równowagi układu, a w każdym razie pozwoliłoby postawić go w sposób analityczny. W perspektywie matematycznej osiąga się jednak to samo – jest to metoda mnożnika – gdy do wyrażonej formuły zasady, wraz ze wszystkimi danymi 3n, dorzuci się sumę:

$$\lambda dL + \mu dM + ...,$$

gdzie: λ μ, ... są dowolnymi współczynnikami (mnożnikami). Mamy wówczas trzy równania

$$P\frac{\partial p}{\partial x} + Q\frac{\partial q}{\partial x} + R\frac{\partial r}{\partial x} + ... + \lambda\frac{\partial L}{\partial x} + \mu\frac{\partial M}{\partial x} + ... = 0,$$

wiadome 3n + c:

$$x, y, z, x', y', z', ..., \lambda, \mu, ...$$

Lagrange zauważa ponadto, że gdy wyraża się siłę członów (§ 5, s. 71) człony te mogą stanowić momenty sił więzów:

> Siły owe mogą wzajemnie zastępować równania warunku wypływające z natury danego układu; mogą je zastępować w taki sposób, iż stosując siły otrzymamy ciała całkowicie swobodne i bez żadnych więzów. Łatwo teraz dostrzec racje metafizyczne, które tłumaczą dlaczego wprowadzenie członów $\lambda dL + \mu dM + ...$ do ogólnego równania równowagi pozwala następnie równanie to potraktować w taki sposób, jak gdyby wszystkie ciała układu były całkowicie swobodne; do tego właśnie sprowadza się istota metody omówionej w tym rozdziale (s. 73).

[27] Jeśli chodzi o statykę, a nie o dynamikę, to Lagrange (w *Mécanique analytique*), a za nim Poinsot stosują raczej prosty symbol d, aniżeli deltę określającą zmienność.

[28] Różniczki zupełne bądź nie; w przypadku tych pierwszych mamy do czynienia z więzami holonomicznymi (z grec. ὅλος = cały).

Przypomniawszy to, możemy przejść do Poinsota[29]. Pokazuje on wprost, nie odwołując się do zasady prędkości wirtualnych, wynik ujęcia w równania *metody mnożnika*. Z pewnością wprost, lecz opierając się na jakich zasadach i w jaki sposób? Pytanie to staje się teraz rzeczywistym problemem.

Poinsot mówi po prostu o „podstawowych zasadach" mechaniki. W rzeczywistości chodzi mu o zasadę rozkładu sił i o tę zasadę, jaką przyjęło milcząco wielu innych uczonych (Lagrange, Ampère ...), a mianowicie o zasadę głoszącą, że punkt zmuszony do przemieszczania się po powierzchni pozostaje w stanie równowagi, gdy oddziaływająca nań siła jest prostopadła do powierzchni. Dochodzi do tego również zasada, którą można by określić jako „zasadę częściowego zestalania się", polegającą na tym, że równowaga układu nie zostaje naruszona, jeśli część bądź całość jego punktów określona zostaje materialnie. Poinsot, młody autor *Eléments de statique*[30], uważa, iż zasady te posiadają naturę rzeczywiście „statyczną", w przeciwieństwie do zasady prędkości wirtualnych, o której sądzi, iż jest niejasna, i że opiera się na kruchych dowodach. Uzasadnienie spoczynku ruchem wirtualnym jest jego zdaniem błędem logicznym; jest to, jak widzieliśmy, stary spór[31]; ograniczę się jedynie do zwrócenia uwagi, iż w sporze tym Lagrange jest oczywiście po przeciwnej stronie niż Poinsot, gdyż zasada prędkości wirtualnych w niczym mu nie przeszkadza, i że najbardziej jasne wyrażenie zasady rozkładu sił opiera się, jego zdaniem, na ruchu[32]. Sama ta różnica nie mogłaby jednak wyjaśnić nieporozumienia, jakie Lagrange wykazał względem Poinsota, gdy ów ostatni przedłożył mu wyniki swych badań, zawarte w jego rozprawie. Na marginesie tej rozprawy Lagrange zamieścił uwagi: notatki te nie przemawiają na jego korzyść.

Z pewnością nie bez znaczenia jest tutaj sposób, w jaki Poinsot przeprowadził dowody swej *Théorie générale de l'équilibre et du mouvement des systèmes*. Jest ona oryginalna, lecz – w każdym razie na pierwszy rzut oka – może wydać się nieco niedostateczna.

Omówione przed chwilą równania 3n, które można zapisać:

$$P\frac{\partial p}{\partial x} + Q\frac{\partial q}{\partial x} + R\frac{\partial r}{\partial x} - \dots = \lambda\frac{\partial L}{\partial x} + \mu\frac{\partial M}{\partial x} + \dots$$

wyrażają sposób, w jaki dane siły działające zostają podzielone na mocy więzów między punkty układu. To jednak, że siły więzów powinny przyjąć tę postać, można łatwo odgadnąć bądź w pewnej mierze pojąć, lecz o wiele

[29] Jeśli chodzi o szczegóły dotyczące pracy Poinsota, poświęconej zasadom mechaniki, zob. P. Bailhache, *Louis Poinsot...*, supra.

[30] *Eléments de statique* ukazały się w 1803 r.

[31] Por. wyżej: przeciwieństwo między dowodami zasady rozkładu sił o charakterze statycznym (Stevin) lub o charakterze dynamicznym (Nevton).

[32] J. L. de Lagrange, *Mécanique...*, § 9, s. 10 i § 14, s. 15–16.

trudniej wykazać z całą ścisłością. Rozważmy zatem układ, będący w stanie równowagi i poddany tylko jednemu powiązaniu:

$$L(x, y, z, x', y', z', ...) = 0.$$

Nie niszcząc równowagi można wyznaczyć wszystkie punkty z wyjątkiem punktu współrzędnych x, y, z. Punkt ów posiada wówczas jedynie swobodę przemieszczania się po powierzchni o równaniu:

$$L(x, y, z, x'_0, y'_0, z'_0, ...) = 0$$

i ażeby zachować równowagę powinien przeto podlegać sile prostopadłej do tej powierzchni. Inaczej mówiąc (jest to znane rozwiązanie geometrii analitycznej), składowe tej siły powinny być proporcjonalne do pochodnych cząstkowych („do pierwszych funkcji", jak wówczas mówiono):

$$\frac{\partial L}{\partial x}, \frac{\partial L}{\partial x}, \frac{\partial L}{\partial x}$$

Jak dotąd nie ma tutaj niczego nowego w stosunku do tego, o czym mówił Lagrange. Ażeby jednak dojść do sformułowania przedstawionych równań 3n, należy jeszcze pokazać, że współczynnik proporcjonalności – „mnożnik" – pozostaje ten sam wówczas, gdy przechodzi się od jednego punktu do drugiego „co, słusznie powiada Poinsot, jest istotą sprawy"[33].

Właśnie tutaj zaczyna rozważać odległości między ciałami układu z jednej strony oraz stopniowo uwzględniać równania więzi z drugiej. W ten sposób Poinsot rozważa sukcesywnie:

– układ, do którego można zastosować tylko jedno równanie więzów w odniesieniu do odległości;

– układ, do którego można zastosować wiele równań odnoszących się do odległości;

– układ z wieloma równaniami odnoszącymi się do współrzędnych.

Zwłaszcza przejście do ostatniego przypadku, który jest przypadkiem ogólnym, zostaje dokonane za pomocą dość niezwykłego tricku analityczno-geometrycznego[34]. Wprowadzenie wzajemnych odległości może jednak wydać

[33] Jest to traktat, który został odczytany w Instytucie, a następnie opublikowany w: P. Bailhache, *Louis Poinsot...*, s. 19 (tekst B). Należy również dowieść, że dodanie innych więzów nie wpływa na rezultat, co oznacza, że siły więzów łączą się w sposób liniowy. Na ten zarzut, przedstawiony w szczególności przez Ampère'a, Poinsot odpowie w bardzo staranny sposób w nocie, która została dołączona do późniejszego wydania jego *Mémoire*, włączonego do *Eléments de statique* (ósme wydanie, 1842). Zob. P. Bailhache, *Louis Poinsot...*, s. 89.

[34] Zabieg ten polega na dołączeniu trzech punktów do układu oraz na spowodowaniu, iż wszystkie wzajemne odległości kończą się na nich. Układ związany jest przeto z przestrzenią odniesienia i można przejść od równania odnoszącego się do odległości, do równania odnoszącego się do współrzędnych.

się sztuczne. Rzeczywiście nie było ono konieczne; można dojść do ogólnego wyniku nie tylko wychodząc od samych zasad Poinsota i rozważając jakieś szczególnego rodzaju więzy między dwoma punktami (sztywny drążek układu kierowniczego)[35]. Wprowadzenie odległości jako przedmiotu rozważań w sprawie Poinsota jest prawdopodobnie jakąś historycznie uwarunkowaną *metamorfozą*. Laplace i Prony nawiązali do tej idei. Poinsot był pod wpływem tych dwóch uczonych, zwłaszcza Prony'ego, który był jego bezpośrednim nauczycielem w Ecole Polytechnique oraz w Ecole des Ponts et Chaussées.

Jest w każdym razie pewne, że Lagrange nie zrozumiał metody Poinsota po pierwszej lekturze jego rozprawy. Spośród tuzina notatek Lagrange'a poświęconych przedłożonym mu *dowodom*, przedstawmy – dla przykładu – następującą wymianę zdań. Poinsot zajmował się wtedy tylko równaniem więzów.

> Jeśli rozważymy prosty i sztywny pręt, który w trzech punktach przyciągany jest przez pewne siły, zobaczymy, utrzymuje Lagrange, że w rozwiązaniach tych, „to znaczy, przyjmując pochodne cząstkowe funkcji więzów", nie określimy warunków równowagi.

Poinsot odpowiada na to w sposób zdecydowany:

> Trzy punkty połączone prostym i sztywnym prętem stanowią układ punktów, których związki są wyrażone za pomocą trzech równań wyrażających fakt, że trzy wzajemne odległości między tymi punktami są, jako *osobne*, niezmienne. Otóż w rzeczywistości chodzi tutaj o jeden układ punktów opisanych co do ich wzajemnych odległości tylko przez *jedno równanie*[36].

Pozostaje wreszcie zagadnienie, do którego stosuje się jeszcze krytyka Poinsota, a mianowicie zastosowanie *zasady d'Alemberta*. Jak widzieliśmy, zasada ta, zdaniem Lagrange'a, pozwala w swej istocie przejść od statyki do dynamiki, gdyż układ ruchów wymuszonych bez ruchów ujętych utrzymuje system w równowadze (a można zastosować zasadę prędkości wirtualnych do tej całości). Zobaczymy jednak, co myśli Poinsot o tym poddaniu dynamiki dedukcyjnym rygorom.

> Widzimy jeszcze, że na próżno przywołaliśmy słynną zasadę d'Alemberta sprowadzającą dynamikę do statyki. Jeśli rozkłada się każdy ruch wymuszony na dwa inne, z których pierwszy byłby ruchem uzyskanym przez ciało, to na mocy owej zasady wszystkie następne ruchy powinny ustanowić równowagę między sobą [...]. Jest to jednak całkowicie równoznaczne z tym, o czym przed chwilą mówiliśmy, a mianowicie z tym, że rzeczywisty ruch każdego punktu jest rezultatem ruchu wymuszonego, jak również oporu, na jaki napotyka z racji swoich więzów z innymi punktami; jest to jasne samo przez się [...][37].

Należy z pewnością uznać, że wychodząc od momentu, w którym odnaleźliśmy możliwość wyrażania sił więzów za pomocą pochodnych

[35] Por. P. Bailhache, *Louis Poinsot...*, s. 183 i n.

[36] *Ibidem*, s. 43.

[37] *Ibidem*, s. 72–74.

cząstkowych równań więzów, zasada d'Alemberta nie jest już do niczego przydatna, czy też raczej staje się zwykłą tautologią (poprzednio miała ona jednak rzeczywistą treść). W ten sposób teoria Poinsota eliminuje również tę zasadę.

9. „OSTATNIE SŁOWO" LAGRANGE'A W KWESTII INTERESUJĄCEGO NAS ZAGADNIENIA

Po to jednak, by ocenić w całej ich doniosłości konsekwencje krytyki Poinsota, należy powrócić do Lagrange'a i porównać § 206–210 pierwszego i drugiego wydania *Théorie des functions analytiques* (1797 i 1813), do którego odnoszą się noty zamieszczone na marginesie rozprawy Poinsota.

W tekście pierwotnym Lagrenge stwierdza najpierw, że jedyny punkt znajdujący się w równowadze na powierzchni o równaniu $f(x, y, z) = 0$ winien podlegać sile, której składowe są proporcjonalne do cząstkowych pochodnych funkcji f. Następnie rozważa układ dwóch punktów[38] i stwierdza, że teoremat jest jeszcze ważny dla każdego z tych punktów. W końcu, w odniesieniu do układu o dowolnej liczbie punktów nie działających w sposób konieczny stosownie do ich odległości, Lagrange, zauważywszy trudność w udowodnieniu równości współczynników pochodnych cząstkowych dla dwóch punktów, rozpatruje przypadek ogólny *wychodząc od zasady prędkości wirtualnych* (§ 210)[39].

W drugim wydaniu *Théorie des fonctions* paragrafy 208–210 zostają gruntownie przerobione. Lagrange rozważa w nich systematycznie, poprzez analizę:

– układ dwóch ciał związanych końcami nierozciągliwą nicią przechodzącą przez stałe koło pasowe;

– układ dwóch ciał oraz dwóch stałych kół pasowych wraz ze sznurkiem przeciągniętym m razy przez jedno z ciał oraz jedno z kół pasowych; n razy zaś przez dwa inne elementy;

– układ kół pasowych praktycznie identyczny z układem przedstawionym w drugim wydaniu *Mécanique analytique*, gdzie Lagrange przedstawia swój

---

[38] Lagrange stwierdza, iż „przyciągają się one lub odpychają dzięki siłom wewnętrznym, bądź dzięki działaniom sprężyn" (§ 209); przyjmuje jednak funkcję: $f = v[(x - x')^2 - (y - y')^2 + (z - z')^2] - d$, która wyraża jedynie stałą odległość między dwoma punktami. Działanie sprężyn winno być zresztą wykluczone ze względu na właściwe zastosowanie zasady prędkości wirtualnych, przynajmniej do więzów układu (lecz nie koniecznie ze względu na konkretyzację danych sił działających).

[39] Zob. jego notę na marginesie *Théorie* Poinsota: „[...] w innych przypadkach rzecz nie wydała mi się jasna i sądziłem, że można było udowodnić teoremat ogólny jedynie za pomocą teorematu prędkości wirtualnych" (P. Bailhache, *Louis Poinsot...*, s. 50).

dowód na zasadę prędkości wirtualnych. Mechanicznej równoważności takiego układu z układem podlegającym pewnym danym siłom działającym odpowiada równoważność *analityczna*, a mianowicie równoważność jednostkowego równania więzów, właściwego dla układu kół pasowych i równania jakiejkolwiek innej więzi. Lagrange pokazuje, że siły więzów powstałe na skutek działania danych sił działających na jakiekolwiek więzy można rozważać w taki sposób, jak gdyby więzy konstytuowane były przez całość zastosowanych kół pasowych[40]. Metoda ta jest z pewnością bardzo pomysłowa, a ostatecznie wszystko to równoznaczne jest z udowodnieniem *metody mnożników* prędkości, wychodząc od „zasady kół pasowych" (zasady opisanej w *Mécanique analytique*) i nie odwołując się od zasady prędkości wirtualnych; to właśnie w sposób odmienny uczynił Poinsot w swej *Théorie générale*!

Można dziwić się, powiada Joseph Bertrand, że słynny autor, zazwyczaj tak troskliwy o podanie źródeł przedstawionych idei, tym razem nie posłużył się żadnym cytatem[41].

I tak Bertrand uznaje pierwszeństwo Poinsota w tej kwestii. Wpływ Poinsota na Lagrange'a jest niezaprzeczalny.

10. KONKLUZJE

Z pewnością dość trudno jest skonkludować trafnie temat tak obszerny, jak ten podjęty obecnie przeze mnie. Wydaje mi się, że poszukiwanie możliwie najmniejszej liczby zasad jako podstawy mechaniki jest przedsięwzięciem uzasadnionym – powiodło się ono dopiero Langrange'owi. Stanowi to jednak jedynie część możliwych do postawienia problemów. Pozostała część – bardziej filozoficzna – dotyczyłaby w mniejszym lub większym stopniu empirycznej

[40] Te paragrafy *Théorie des fonctions analytiques* zostały umieszczone jako objaśnienia w: J. L. de Lagrange, *Mécanique...*, t. 2, s. 365 i n.

[41] Należy wziąć pod uwagę, że ten sam układ kół pasowych powinien być rozumiany na dwa sposoby, tj. inaczej, kiedy mowa o dowodzie prędkości wirtualnych sformułowanym przez Lagrange'a oraz zupełnie inaczej w *Théorie des fonctions analytiques* (w *Théorie* nie ma ciężarów, lecz jedynie zawiązania sznurka). W pierwszym przypadku koła pasowe urzeczywistniają faktycznie dane siły działające, lecz w drugim same stanowią więzy układu. Układ złożony z m końców sznurka na dwóch kołach pasowych, z n końców na dwóch innych etc., odpowiada równaniu więzów: $f = mv[(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2] + nv[(x' - a')^2 + (y' - b')^2 + (z' - c')^2 + ... - d = 0$. Niezależnie od problemu współmierności stałych m, n ..., z wyjątkiem poszczególnych przypadków, można zawsze znaleźć m, n ... takie, że pochodne cząstkowe $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$, $\partial f/\partial z$, $\partial f/\partial x'$, $\partial f/\partial y'$, $\partial f/\partial z'$, ... są wszystkie równe pochodnym cząstkowym $\partial F/\partial x$, $\partial F/\partial y$, $\partial F/\partial z$, $\partial F/\partial x'$, $\partial F/\partial y'$, $\partial F/\partial z'$, ... o jakiejkolwiek funkcji więzów. Lagrange, pokazawszy, że siły więzów układu kół pasowych są proporcjonalne do pochodnych cząstkowych f, wnioskuje z tego, że siły więzów danego układu – które są takie same na mocy hipotezy – są proporcjonalne do pochodnych cząstkowych f, czyli F. Zrównując siły dane z tak uzyskanymi siłami więzów, znajduje natychmiast równanie stanowiące wynik metody mnożników.

natury mechaniki, jej koniecznego bądź przypadkowego charakteru. Poprawną odpowiedź, moim zdaniem, można odnaleźć już w całości u Archimedesa, według którego, mechanika wymaga (przyjęcia) nie dających się dowieść (zatem empirycznych) postulatów; niezależnie od tego mechanika ta winna być rozwijana dalej na wzór matematyki. Liczne i różnorodne metafizyki, budowane na bazie nauki o ruchu (Arystoteles, Descartes, Leibniz), zagmatwały później cały problem. Tacy uczeni jak d'Alembert i Carnot usiłowali usunąć całkowicie pojęcie siły[42]; należy wszakże zauważyć, że nie uważali oni mechaniki za naukę przypadkową, a wręcz przeciwnie[43]. Ernst Mach wyznawał ścisły pozytywizm, zgodnie z którym mechanika powinna posiadać charakter czysto empiryczny. Jednakowoż nie przekonał wszystkich, wręcz przeciwnie, także cały ów spór o charakterze zasadniczo filozoficznym pozostanie długo jeszcze otwarty.

Przełożył Paweł Pieniążek
Przekład przejrzała i poprawiła Małgorzata Kwietniewska

Patrice Bailhache

WHAT ARE THE GROUNDS OF CLASSICAL MECHANICS?
— THE REPLY OF THE HISTORY OF SCIENCE

The author tries to give an answer to the question posed in the title of the paper by referring to those analyses and arguments which have been found most important by the history of science (laws of Stevin, d'Alembert, Lagrange, arguments of Lazure Carnot, Prony, Ampère, Laplace...). In his opinion the only possible philosophy of mechanics must have the empirical nature. The problem was perceived already by Archimedes, though it was later obscured by numerous metaphysics. Yet, it is only the solution of Lagrange which can be said to be approaching the ideal. However, the philosophical part of the arguments still remains unsettled.

---

[42] J. L. de Lagrange, *Mécanique...*, t. 2, s. 371.

[43] J. Le Rond D'Alembert, *Traité de dynamique...*, s. XXVI i dalej: „To wszystko, co widzimy wyraźnie w ruchu jednego ciała, to to, że przemierza ono pewną przestrzeń, i że potrzebuje pewnego czasu na jej przemierzenie [...] tymczasem ja odwróciłem, że tak powiem, wzrok od **przyczyn wprawiających w ruch**, ażeby widzieć jedynie ruch, który one wytwarzają; [...] wykluczyłem całkowicie wewnętrzne siły ciała znajdującego się w ruchu, byty niejasne i metafizyczne, mogące jedynie zaciemnić jasną ze swej natury Naukę". Por. też J. L. de Lagrange, *Mécanique...*, s. 1: „W stanie równowagi siła nie może zostać urzeczywistniona; istnieje ona jedynie jako proste dążenie do ruchu; powinno się jednak zawsze mierzyć ją skutkiem jaki wywołałaby, gdyby nie została zatrzymana".