ACTA UNIVERSITATIS LODZIENSIS
FOLIA PHILOSOPHICA 5, 1988
https://doi.org/10.18778/0208-6107.05.09

Jean Pierre Ginisti

O POPRAWNOŚCI LOGICZNEJ DEFINICJI WYRAŹNYCH

W pracy tej będzie się badać pewne własności definicji, głównie własności przekładalności (eliminabilité) i nietwórczości w kontekście różnych celów definiowania. Punktem odniesienia będzie pojęcie definicji znane w systemach formalnych jako definicja "wyraźna" lub "bezpośrednia" i określane przez ścisłe reguły.

Konstrukcja systemu formalnego obejmuje określenie zbioru znaków i reguł operowania nimi, czyli tego, co stanowi system syntaktyczny niezinterpretowany. Następnie system ten może uzyskać interpretację semantyczną. Z powodów heurystycznych praktyka bywa odmienna: na ogół logik dysponuje semantyką już w momencie budowy syntaksy systemu formalnego. Poszukuje on wobec tego takiej syntaksy, która odpowiadałaby przyjętej wpierw interpretacji. Ilustruje to trafnie uwaga R. Poirier[1].

Definicji zwykłej, zwanej semantyczną, będzie przeciwstawiona definicja formalna, tj. syntaktyczna. System formalny ściśle określony zawiera:

1) listę znaków (zwaną alfabetem), w której często wyodrębnia się różne kategorie;

2) procedury (zwane regułami formowania), wedle których tworzy się pewne ciągi znaków, będące wyrażeniami elementarnymi albo złożonymi.

Aspekt języka formalnego określony w punktach 1) i 2), nazywamy "morfologią". Morfologia jest wzbogacana przez:

3) wybór właściwego podzbioru formuł (zwanych aksjomatami);

4) reguły definicji.

Dla rozróżnienia języka przedmiotowego i metajęzyka, wyrażenia

[1] "pour faire le portait d'un homme de le prendre pour modèle, et non de chercher, parmi une suite d'esquisses faites au hasard, celle qui se trouverait lui ressembler le plus"; R. Poirier, Logique et modalité, Paris 1952, s. 93.

należące do pierwszego z nich zapisywać będziemy małymi literami, zaś metajęzykowe - dużymi.

Przyjmijmy, że RD_1, RD_2, ..., RD_n są jedynymi regułami dedukcji danego systemu formalnego S. Każda inna reguła RD' będzie mogła być dołączona do systemu S wtedy, gdy przyjmie się metatwierdzenie głoszące, że każde twierdzenie otrzymane przez użycie tej reguły może być otrzymane bez jej zastosowania, tzn. przez zastosowanie wyłącznie reguł RD_1, ..., RD_n. Taka reguła, zwana regułą pochodną dedukcji, w istocie tylko skraca dowód. Dla jej przyjęcia wystarczy udowodnić twierdzenie T, na którym się ona opiera.

Wprowadzone pojęcia sprecyzujemy na przykładzie systemu zwanego "TB" (pochodzącego od Tarskiego i Bernaysa):

Alfabet

symbole I kategorii p, q, m, n, p', ..., n', p'', ..., n''...,

symbole II kategorii $\supset$

symbole III kategorii (,).

Reguły formowania

RF_1 - symbol I kategorii jest formułą,

RF_2 - jeśli P i Q są formułami, to $(P \supset Q)$ jest formułą,

RF_3 - nic poza tym nie jest formułą.

Aksjomaty

A1 $\vdash (p \supset q) \supset ((q \supset m) \supset (p \supset m))$,

A2 $\vdash ((p \supset q) \supset p) \supset p$,

A3 $\vdash p \supset (q \supset p)$.

Reguły dedukcji

$$RD_1 \quad \frac{\vdash P[p_1, \ldots, p_n]}{\vdash P[p_1/P_1, \ldots, p_n/P_n]} \quad \text{(reguła podstawiania)},$$

$$RD_2 \quad \frac{\vdash P \supset Q, \ \vdash P}{Q} \quad \text{(reguła odrywania)}.$$

Wychodząc od twierdzenia T_1 "$\vdash p \supset (p \supset p)$" otrzymanego przez podstawienie "p" w miejscu "q" w A3, reguła wtórna

$$RD_1' \quad \frac{\vdash P}{\vdash P \supset P}$$

może być przyjęta na podstawie metatwierdzenia następującego:

MT_1 każde twierdzenie postaci $\vdash P \supset P$ otrzymane w TB na podstawie RD_1' może być otrzymane przez zastosowanie jedynie RD_1, RD_2.

Dowód:

1) $\vdash P$ jako hipoteza,

2) $\vdash p \supset (p \supset p)$ T_1,

3) $\vdash P \supset (P \supset P)$ do 2) RD_1, p/P z wiersza 1,

4) $\vdash P \supset P$ do 3) i 1) RD_2.

Przedstawiony przykład systemu, w którym pokazana została rola reguł wtórnych, pozwala ująć definicje w podobny sposób.

Przyjmiemy, że kategorii reguły wtórnej odpowiadać będzie kategoria definicji.

Jeżeli dysponujemy systemem niezinterpretowanym S, w którym zawarta jest pewna klasa wyrażeń E[2], to definicja byłaby wyrażeniem wprowadzającym pewne symbole lub pewne wyrażenia nie figurujące w składni systemu S, które stanowiłyby skróty odpowiednich elementów E[3]. W przeciwstawieniu do elementów nowych, te które już figurują w alfabecie będą nazywane pierwotnymi. Znak "$\underset{df}{=}$" używany będzie jako znak łączący definiendum z definiensem. W ten sposób w systemie TB definicją będzie wyrażenie postaci:

$$p \vee q \underset{df}{=} (p \supset q) \supset q$$

Definiendum może być symbolem pojedynczym bądź też symbol definiowany może występować w pewnym kontekście[4]. Przy czym użycie różnych symboli podlegać będzie pewnym ograniczeniom, których racje zostaną podane.

Wyrażenie wprowadzające n-argumentowy funktor "b" jest definicją względem składni TB wtedy i tylko wtedy, gdy:

1) jest ono postaci: "... $\underset{df}{=}$ ...";

2) definiendum zawiera n różnych zmiennych, wśród których tylko jeden raz użyte jest "b";

3) definiens jest formułą TB zawierającą dokładnie te same zmienne co definiendum[5].

---

[2] Przy zapisie formuł i metaformuł pomijana będzie pierwsza para nawiasów: będziemy pisać "$p \supset q$" zamiast "$(p \supset q)$"; "$(p \supset q) \supset p$" zamiast "$((p \supset q) \supset p)$" itd.

[3] A. Church zauważa, że w niektórych przypadkach nowe wyrażenie może nie być krótsze od wyrażenia zastępowanego. Może być bowiem pod pewnym względem wygodniejsze. (Introduction to Mathematical Logic, vol. I, Princeton University Press, Princeton, 1956, s. 76, przyp. 167.

[4] W systemie TB definicja jest relatywizowana do klasy formuł, tzn. definiens może być tylko formułą. Definiendum musi być wyrażone również tak, jak gdyby chodziło o formułę. W konsekwencji definicja będzie kontekstowa. Będziemy pisać w sposób ogólny: "$P \times Q \underset{df}{=} MyN$", a nie "$(P \times Q) \underset{df}{=} M y N$".

[5] Będziemy mówić, "względem składni TB", a nie "względem TB", aby nie przesądzać o spełnianiu własności łączącej definicję z tezami systemu.

Możliwy jest punkt widzenia, według którego definicja dotyczyłaby nie tylko danego wyrażenia szczegółowego, ale również klasy wyrażeń. Wówczas definicja staje się schematem definicji, wyrażonym przy użyciu metazmiennych. Użycie znaku definicyjnego "$=_{df}$" będzie wymagało posłużenia się metajęzykiem (wbrew opinii w tym względzie wyrażonej przez Russella i Whiteheada). Podany wcześniej przykład definicji będzie miał postać:

$P \vee Q =_{df} (P \supset Q) \supset Q$

Niezależnie od typu definicji zarówno definiendum, jak i znak definicyjny nie należą do systemu. Dlatego też operowanie definiendum nie podlega regułom tego systemu. Trzeba dodać zatem "regułę redukcji" i "regułę rozszerzania". Pierwsza z wymienionych pozwala na zastępowanie definiensa przez definiendum, druga zaś na zastępowanie odwrotne (czyli definiendum przez definiens). Reguły te będą traktowane jako reguły dedukcji, a wyrażenia zawierające symbole wprowadzone przez definicje tak jak formuły systemu. Możliwe byłoby również pojmowanie definicji jako reguł i wtedy dana definicja przybierałaby postać:

$$\frac{\ldots P \vee Q \ldots}{\ldots (P \supset Q) \supset Q \ldots} \qquad \frac{\ldots (P \supset Q) \supset Q \ldots}{\ldots P \vee Q \ldots}$$

W stosunku do danego systemu zwanego "pierwotnym", nazywać się będzie systemem "wzbogaconym" taki system, który zawiera definicje i reguły ich dotyczące. Symbol wprowadzany przez definicję nie jest dołączany do alfabetu systemu.

Cecha "bycia przekładalnym" z dowolnej formuły systemu wzbogaconego określona byłaby mianem kryterium "przekładalności". Można by je sformułować w sposób następujący: dla każdej formuły Q systemu wzbogaconego, zawierającego symbol "b" wprowadzony definicyjnie, winna istnieć możliwość utworzenia formuły Q´ należącej do systemu pierwotnego, nie zawierającego "b" i takiego, że w systemie wzbogaconym Q´ byłoby dedukcyjnie wyprowadzalne z Q i odwrotnie[6].

---

[6] W definicjach "b", zwanych "kontekstowymi" ta własność byłaby spełniona tylko dla zbioru utworzonego z "b" i jego kontekstu. Gdy kontekst jest utworzony z metazmiennych, jak w definicji przykładowej, obejmuje on wszystkie przypadki, dla których własność ta jest pożądana. W systemie zinterpretowanym, "b" byłoby również interpretowane tylko kontekstowo; zatem każda interpretacja symboli pierwotnych zdeterminowałaby interpretację "b", jeśli "b" byłoby zdefiniowane poza kontekstem. Definicja obarczona błędem "błędnego koła" narusza zasadę przekładalności. Nie będzie się mówić tutaj o definicjach zwanych "rekursywnymi", w których symbol definiowany występuje zarazem w definiendum i definiensie, jak np. "+" w:

W logice klasycznej, gdzie symbole posiadają interpretację semantyczną byłoby tak, że:

"$P \underset{df}{\equiv} P'$" wtedy i tylko wtedy, gdy "$\models P \equiv P'$",

gdzie "$\models$" jest znakiem kwalifikującym formułę po nim następującą jako prawo. Albo "$\models P \equiv P'$" wtedy i tylko wtedy, gdy:

$\models (P \supset P') \cdot (P' \supset P)$

zatem wtedy i tylko wtedy, gdy:

$\models P \supset P'$ i $\models P' \supset P$

Ogólnie, "N jest dedukcyjnie wyprowadzalne z M ($M \vdash N$)" znaczy że jest prawdą, iż N następuje po warunku M, inaczej mówiąc "$M \vdash N$" wtedy i tylko wtedy, gdy:

"$\models M \supset N$"

i zatem:

"$P \underset{df}{\equiv} P$", $\models P \equiv P'$ wtedy i tylko wtedy, gdy $P \vdash P'$ i $P' \vdash P$.

Identyczność treści definiendum i definiensa winna być rozpatrywana na pewnej określonej płaszczyźnie. Wydaje się bowiem, że idea definicji "realnej" w sensie arystotelesowym nie jest jasna. Wiadome jest bowiem, że nie istnieją wyrażenia będące rzeczywistymi synonimami i nawet własności formalne definiendum nie mogą być przeniesione na definiens. Na przykład, chociaż własnością wyrażenia definiowanego "$p \vee q$" jest jego równoważność względem wyrażenia "$q \vee p$", to jednak taka własność nie przysługuje definiensowi, to znaczy: "$(p \supset q) \supset q$" nie jest równoważna "$(q \supset (p \supset q)$". Interpretując to, można stwierdzić, iż "$p \vee q$" posiada tę samą treść co "$q \vee p$", zaś "$(p \supset q) \supset q$" jest uważane za posiadające tę samą treść, co "$p \vee q$", ale "$(q \supset (p \supset q)$" nie ma tej samej treści, co "$p \vee q$". Ścisłą odpowiedniość definiendum i definiensa można uzyskać w różny sposób i można by wymagać, aby definicje funktorów posiadały taką własność[7]. Robert Blanché mówiąc o systemie mającym jako terminy pierwotne "$\supset$" i "$\sim$", stwierdza, że nie uda się uzyskać takiej definicji, która byłaby zupełna i nie byłaby za szeroka, o ile nie odwołamy się do metajęzyka[8]. Powiedzieć można,

---

$a + 0 = a$
$a + S(x) = S(a + x)$.
W tym przypadku nie chodzi w istocie o definicje wyraźne. Z drugiej strony, istnieją procedury pozwalające określić te symbole w definicjach wyraźnych.

[7] Por. C h u r c h, op. cit., s. 133-134.

[8] "si l'on définit la conjonction par $\sim(p \supset \sim q)$, ... on laisse échapper une partie du défini, la conjonction comportant aussi le cas où $\sim(q \supset \sim p)$, qui n'est pas équivalent à $\sim(p \supset \sim q)$, ... Il faudrait, pour avoir ici une définition qui convienne à tout le défini, conjoindre ces deux éléments de la définition, c'est-à-dire faire usage d'une jonction, et introduire ainsi le défini

że symbol definiowany i jego treść mogłyby być przekładalne tylko wewnątrz teorii, przy czym nigdy nie zostaje zachowane to wszystko, co może być pomyślane odnośnie do pojęcia związanego z danym symbolem[9].

Jak łatwo pokazać, kryterium przekładalności jest spełnione przez definicję systemu TB. Aby kontekst "$\vee$" figurujący w definiendum obejmował wszystkie zastosowania tego symbolu ("$\vee$") należy nadać definiendum najogólniejszą formę "$P \vee Q$". Wyrażenia takie jak "$P \vee P \underset{df}{=} (P \supset P) \supset P$" lub "$(P \vee P) \vee Q \underset{df}{=} (P \supset Q) \supset Q$" nie pozwalałyby wyeliminować symbolu "$\vee$" z wyrażenia o postaci "$P \vee Q$".

Poruszane dotąd zagadnienia dotyczyły tylko definicji w systemie logiki zdań. Podobne uwagi można by sformułować w stosunku do systemów pozalogicznych stosujących środki rachunku predykatów I rzędu ze stałą identyczności: teorii w dyscyplinach takich, jak fizyka, psychologia czy matematyka.

Jeśli zaś chodzi o użycie kwantyfikatorów, to definiens powinien zawierać tylko zmienne wolne, gdyż o ile przybrałby postać $\forall x$... (lub $\exists x$...), to nie pozwalałoby to na usunięcie symbolu definiowanego z formuł nieskwantyfikowanych lub skwantyfikowanych odmiennie. Definiens także winien zawierać wszystkie symbole wykorzystywane, niezbędne do formalizacji danej teorii ekstralogicznej poza symbolami pierwotnymi właściwymi dla tej teorii.

I tak na przykład, reguły definiowania symbolu relacji "$\leqslant$" lub "zięć x" wyrażać się będą następująco: wyrażenie wprowadzające relację n-argumentową jest definicją odnoszącą się do systemu pozalogicznego S wtedy i tylko wtedy, gdy:

1) jest ono postaci: "$E[v_1, \ldots, v_n] \underset{df}{=} P$",

2) "$v_1, \ldots, v_n$" są różnymi zmiennymi,

---

dans le définissant. Ou bien donc la définition demeurera incomplète, ou bien elle souffrira d'une faute grossière. A moins qu'on fasse appel à la métalangue, en se permettant alors de sortir du plan du calcul. En d'autres termes: on n'a pas le droit d'écrire, pour définir exactement p. q, la formule $\sim(p \supset \sim q)$. $\sim(q \supset \sim p)$, mais seulement l'expression $\sim(p \supset \sim q)$ et $\sim(q \supset \sim p)$, en révélant par ce "et" non symbolique qu'une jonction ne se laisse pas intégralement traduire, dans la langue du calcul, en termes combinés d'implication et de négation"; R. Blanche, Sur le système des connecteurs interpropositionnels, "Cahiers pour l'Analyse" [Paris], Hiver 1969, No 10, s. 142 (Symbole zostały zapisane przy użyciu symboliki stosowanej w artykule).

[9] M. Merlean-Ponty, Sens et non-sens, ed. Nagel, Paris 1948, s. 162.

3) P nie zawiera innych zmiennych wolnych poza "$v_1, \ldots, v_n$",
4) P jest formułą S[10].

Podobne reguły dotyczyłyby definicji symboli operacji takich jak np. "$\frown$" i stałych indywiduowych takich, jak np. "3"[11].

W ten sposób wyrażenie:

$$r \frown y \underset{df}{\equiv} \exists z(s \frown z \cdot tzy)$$

gdzie r, s, t są relacjami binarnymi, spełnia warunki wymienione w punktach 1, 2 i 3, a także warunek 4 jeżeli założy się że prawa strona jest formułą systemu S, względem którego wyrażenie jest budowane. Definiendum jest eliminowalne. Natomiast wyrażenie interpretowane jako "x jest zięciem y" znaczy tyle co "istnieje takie z, że x jest mężem z i z jest córką y".

W danym systemie S definiendum byłoby taką formułą, której odpowiadałaby jedyna formuła będąca definiensem; stąd też jest ono przekładalne[12]. H. Leblanc proponuje, aby wzmocnić ten warunek i zapisać go za pomocą terminów logicznych. To nowe wymaganie charakteryzowałoby to, co chce on określić mianem "definicji absolutnych". Jeżeli wprowadzimy symbol "b", to wtedy system S będzie zupełny, o ile wszystkie wyrażenia prawdziwe dla "b" będą tezami S´. Własność tę można wyrazić syntaktycznie następująco: dla każdej formuły P zawierającej "b" symbolicznie "P[b]", byłoby tak, że albo "$\vdash$P", albo "P . S´" jest niezgodne.

Załóżmy, że "b" będzie symbolem lub wyrażeniem do zdefiniowania, a "Ab" zupełnym zbiorem aksjomatów dla "b". Formuła "a" danego systemu S będzie mogła być nazwana definiensem "b" wtedy, gdy "a" posiada wszystkie własności "b". Tak więc jeśli "A" jest zupełne dla "a", co zapisujemy "Aa", a co inaczej da się wyrazić tak, że jeśli jest prawdą, że w S: "$\exists$x Ax". Skądinąd, będzie się wymagało, żeby x było jedynym, czyli: $\exists!$ x Ax" bądź a = (ıx)Ax (dla każdej formuły "P[a]" i jedynie dla niej, bądź "$\vdash$P[a]" w S, bądź "P[a] . S" czynią A niezgodnym).

W rezultacie definicja "b $\underset{df}{\equiv}$ a" będzie zwana "absolutną"

---

10 P. S u p p e s, Introduction to Logic, Van Nostrand Reinhold Company New York 1957, s. 157.

11 Aby uprościć, zakłada się zawsze, że definicja składa się tylko z jednego wyrażenia. W rzeczywistości jednak definiowanie może odbywać się przy użyciu większej liczby wyrażeń. Zatem symbol znajduje się w różnych kontekstach po stronie lewej (a więc i po prawej) znaku "$\underset{df}{\equiv}$".

12 "si définir c´est éliminer, c´est éliminer d´une manière unique"; H. L e b l a n c, On definitions, "Philosophy of Science" October 1950, vol. 17, s. 304. Zmodyfikowana została przez autora artykułu symbolika Leblanca, dla ujednolicenia jej z symboliką używaną w artykule.

względem systemu S wtedy i tylko wtedy, gdy z "Ab" będącego zupełnym systemem aksjomatów dla "b" można będzie wyprowadzić "a = (1x) Ax".

Dowód tych dwóch warunków, tj. zupełności S dla "b" i jedyności "a" dla "b" wymaga zwłaszcza w drugim przypadku silnej logiki, znacznie silniejszej niż ta, na której opiera się system S. Definicja syntaktyczna zupełności S dla "b" byłaby za silna dla pewnych systemów takich, jak np. rachunek predykatów pierwszego rzędu. H. Leblanc uważa, że należałoby dodać "słabszy substytut syntaktyczny". Istnieją jednakże trudności wywodzące się tyleż z symbolu do zdefiniowania, ileż z definiensa: pewne systemy, jak np. arytmetyka sformalizowana są niezupełne i nie dają się uzupełnić dla danego symbolu "b". Jeśli "Ab" byłoby niezupełne, to żadna definicja nie będzie wtedy absolutna względem tego typu systemu. Inne systemy posiadają zbiór terminów pierwotnych mogących dostarczyć wielu definiensów dla "b". Warunek jedyności tym bardziej nie będzie spełniony. Można spotkać zarówno systemy, w których terminy pierwotne są zależne, jak i takie gdzie terminy pierwotne są niezależne i gdzie wiele definiensów będzie odpowiadało "b". Trzeba by odnaleźć taki zbiór terminów pierwotnych, w którym każdy będzie niezależny od innych a zdolny do zdefiniowania tych samych symboli i gdzie "b" otrzyma tylko jeden definiens. Nie można też wyeliminować wszelkiej arbitralności z czynności definiowania.

Cecha symbolu "b" "bycia przekładalnym" może być spełniona przez jeden lub wiele definiensów. Nie wystarczy to jednak do tego, aby w systemie wzbogaconym nie pojawiło się twierdzenie, w którym wystąpi "b".

Zostanie sformułowane kryterium nietwórczości definicji: definicja symbolu "b" będzie określona mianem nietwórczej względem systemu S wtedy i tylko wtedy, gdy jej wprowadzenie nie spowoduje otrzymania w systemie wzbogaconym takich twierdzeń, których nie byłoby w systemie pierwotnym[13].

Tak twórczość, jak i nietwórczość dotyczą nie samej definicji, lecz definicji i reguł jej użycia. Łatwo dowieść, że wyrażenie

$$P \vee Q \underset{df}{=} (P \supset Q) \supset Q$$

---

[13] Każda z dwóch własności: przekładalność i nietwórczość jest niezależna od drugiej; symbol definiendum może być przekładalny, lecz definicja twórcza. Z drugiej zaś strony definicja symbolu może być nietwórcza, a symbol nie (zawsze) przekładalny.

jest definicją względem TB, spełniającą kryterium nietwórczości. Można to wykazać na podstawie narzędzi semantycznych pokazując, iż TB i TB wzbogacone przez tę definicję, czyli TB´ mają ten sam zbiór tez mających postać implikacji[14]. Krótko mówiąc, z jednej strony wykazuje się, że TB jest semantycznie zupełny, z drugiej zaś, że wszystkie tezy TB są tautologiami. Formuła jest więc tezą TB wtedy i tylko wtedy, gdy jest tautulogią postaci implikacji. Następnie wykazać można, że w systemie TB´ formuła postaci implikacji jest tezą jeśli jest tautologią.

Jeśli formuła postaci implikacji jest tautologią TB´, to jest też tezą TB´, ponieważ aksjomaty i reguły TB są regułami TB´. Jeśli zaś formuła o postaci implikacji jest tezą TB´, to jest ona tautologią, ponieważ wystarczy pokazać, że reguły redukcji i rozszerzania wtedy, gdy są stosowane jako RD_1, RD_2 poszerzają własność aksjomatów wyrażającą się w tym, że są one tautologiami postaci implikacji.

Jeśli w tautologii zastępuje się formułę postaci $(P \supset Q) \supset Q$ przez formułę $P \vee Q$ bądź odwrotnie, to formuła pozostaje tautologią, ponieważ

"$\models ((p \supset q) \supset q) \equiv (p \vee q)$"

Podobnie, gdy zastępuje się wyrażenie postaci $(P \supset Q) \supset Q$ przez wyrażenie postaci $P \vee Q$ lub odwrotnie, to drugie jest tautologią, jeśli jest nią pierwsze.

Skoro TB i TB´ mają ten sam zbiór tez, to definicja nie może wprowadzić tez, w których symbol "v" nie pojawiałby się i które nie byłyby tezami TB.

Jeśli chodzi o problem twórczości definicji, to dotyczy on jedynie tez nie zawierających nowego symbolu. To właśnie eliminowalność (a nie twórczość) miałaby pokazać, że każdej tezie i nawet każdej formule TB´ zawierającej symbol "v" odpowiadałaby teza postaci implikacji, która jest względem niej równoważna.

Ważną konsekwencją nietwórczości jest względna spójność (w wielu możliwych sensach tego słowa) systemu wzbogaconego w stosunku do pierwotnego. Spójność najogólniej można określić w ten sposób,

---

[14] Wyrażenia "teza implikacyjna" "formuła implikacyjna" nie znaczą więc jedynie, że funktorem głównym jest "⊃", wedle języka bardziej potocznego, przyjętego tu dla wygody. Ogólnie biorąc, warunkiem wystarczającym nietwórczości jest to, że wszelka realizacja, będąca modelem systemu pierwotnego S, będzie miała rozszerzenie będące modelem systemu wzbogaconego S´ (realizacja R´ od S´ będąc rozszerzeniem realizacji R od S, jeśli R i R´ mają tę samą dziedzinę i jeśli każda stała S jest interpretowana tak samo w R i w R´). Nie można podać bardziej kompletnego warunku koniecznego i wystarczającego.

że żadna formuła, która nie należałaby do systemu pierwotnego nie jest tezą. System wzbogacony byłby też spójny, gdyż nie zawiera on innych tez poza tezami systemu pierwotnego. Tak samo, jeśli spójność scharakteryzowana jest w sposób bardziej szczegółowy jako niesprzeczność i jeśli system pierwotny z negacją jest niesprzeczny, to system wzbogacony jest taki również, o ile pierwszy system dysponuje tezą: "$(p \cdot \sim p) \supset q$" oraz regułami pozwalającymi wyprowadzić dowolną formułę ze sprzeczności.

W takim przypadku, gdy sprzeczność $P \cdot \sim P$ mogłaby być wyprowadzona dedukcyjnie w systemie wzbogaconym, można by również wyprowadzić dedukcyjnie formułę Q, o ile $\sim Q$ jest tezą systemu pierwotnego i odwrotnie. Byłaby to zatem taka teza systemu wzbogaconego Q lub $\sim Q$, która nie byłaby tezą systemu pierwotnego, niesprzecznego z założenia. Zgodnie z ogólnymi warunkami nałożonymi na system, jeśli definicja jest nietwórcza, to system wzbogacony jest niesprzeczny, o ile system pierwotny jest również taki. Nie potrzeba przyjmować spójności jako trzeciego kryterium definicji[15].

Charakter twórczy bądź nietwórczy definicji zależy nie tylko od wyrażenia stanowiącego definicję, lecz także od aksjomatów i reguł systemu pierwotnego. Dla wyrażenia wcześniej przedstawionego "$r\ xy = \exists z\ (sxz \cdot tzy)$" własność bycia definicją pozostaje nieokreślona, o ile nie uwzględnia się aksjomatów i reguł systemu, dla którego definicja jest proponowana. W ten sposób można pokazać że wyrażenie takie, jak:

$$L\,\alpha \underset{df}{=} (\alpha \dashv \alpha) \dashv \alpha$$

$$M\,\alpha \underset{df}{=} (\alpha \dashv L\alpha) \dashv \alpha$$

modyfikują lub nie to, że formuła jest tezą bądź nią nie jest. Według różnych systemów Lewisa, z którymi te tezy są związane "L" jest interpretowane jako operator konieczności, "M" - możliwości, $\dashv$ - jako symbol implikacji ścisłej, α zaś jest metazmienną zdaniową. Te dwie definicje określałyby to, iż formuła jest lub nie jest tezą w systemie S3. Natomiast nie czyniłyby tego w odniesieniu do systemu S5, a jedynie pierwsza z nich - względem S4[16].

---

[15] Zauważyć można, że jeżeli w danych warunkach definicja wprowadza sprzeczność w system pierwotny niesprzeczny, to jest ona twórcza. Jednak z tego, iż definicja nie wprowadza sprzeczności w system pierwotny niesprzeczny, nie wynika, że będzie ona twórcza, może bowiem pozwalać dedukcyjnie wywieść (w systemie wzbogaconym) formułę wyrażoną za pomocą symboli pierwotnych, nie będącą tezą systemu pierwotnego, ale nie wprowadzającą sprzeczności.

[16] Por. G. E. H u g u e s, M. J. C r e s s w e l l, An Introduction to Modal Logic, Methuen and Co, London 1968, s. 295.

Aby uwypuklić wyżej wskazaną analogię, między pojęciami reguły odrywania i definicji, przedstawimy ponownie to zagadnienie. Przyjmiemy, że "$a_1, a_2, \ldots, a_n$" będą jedynymi symbolami alfabetu systemu formalnego S. Każdy inny symbol "b" będzie mógł być użyty w S po ustanowieniu metatwierdzenia:

1) każde wyrażenie E zawierające "b" może być sformułowane z pominięciem "b" za pomocą formuły F zawierającej tylko "$a_1, \ldots, a_n$" dzięki wyrażeniu dołączonemu do systemu pierwotnego;

2) E i F są równoważne w systemie wzbogaconym;

3) dołączenie "b" nie będzie pociągać za sobą tego, że tezą systemu wzbogaconego nie będzie formuła nie zawierająca "b", a będąca tezą systemu pierwotnego.

Dotąd poruszano tylko status definicji w ramach klasycznej teorii aksjomatycznej, tj. dla systemów logicznych posiadających aksjomaty, reguły zastępowania i odrywania, jak np. TB, systemy Lewisa bądź też dla systemów pozalogicznych, będące ich rozszerzeniami. Uwagi te można by przenieść łatwo na systemy logiczne posiadające inne reguły, np. regułę cięcia[17] lub aksjomaty w metazmiennych, tj. schematy aksjomatów, które unikają reguły podstawiania będąc pośrednimi aksjomatami i regułami. Te uwagi przenosiłoby się także na systemy dedukcji naturalnej. Naszkicujemy sposób formułowania systemu o składni systemu TB według metod Fitch'a[18].

System (określany jako F) nie ma aksjomatów, lecz dwa typy reguł: pierwsze dotyczące sytuacji ogólnych, drugie zaś dostarczające środków wprowadzających lub eliminujących dany funktor. Dla takiego systemu zdań, jak F, mielibyśmy następujące reguły ogólne:

1) na każdym etapie dedukcji można wprowadzić jedną bądź wiele przesłanek (hipotez). Wskazane to będzie za pomocą kreski pionowej idącej od pierwszej do ostatniej hipotezy i przez kreskę poziomą pod ostatnią hipotezą.

reguła hip (1)	P_1	hip
	.	
	.	
	.	
(n)	P_n	hip

---

[17] $\dfrac{\vdash P, \vdash Q\ [\ldots(P \supset P')\ldots]}{\vdash Q\ [\ldots P' \ldots]}$ por. R. B. A n g e l l, On a less restricted type of rule of inference, "Mind" 1960, vol. LXIX; i d e m, The sentential calculus using rule of inference Re, "Journal of Symbolic Logic" juin 1960, vol. 25, No 2.

[18] Por. F. B. F i t c h, Symbolic Logic, The Ronald Press Co, New York 1952; J. B. G r i z e, Logique moderne, fasc. I, Mouton Gauthier-Villars, Paris 1969.

Można stosować tę regułę wiele razy, na przykład dwa i wówczas

(1)	P	hip
(2)	Q	hip
(n)	M	hip

nazwie się ją "pod-dedukcją" danej dedukcji dowolnego ciągu formuł takich jak M.

2) Można powtarzać w dedukcji wyrażenie występujące poprzednio. Formalnie:

reguła rep. (n) | P
\- - -
| P (n), rep

3) Można je także powtarzać w pod-dedukcji (Reiterage). Formalnie:

Reguła reit. (n) | P
\- - -
| P (n) reit

"$\supset$" będzie jedynym funktorem pierwotnym systemu, zaś reguły wprowadzania (i) i eliminacji (e) będą następujące:

reguła $\supset$e	(n)	$P \supset Q$	
	(m)	P	
		Q	(n) (m), $\supset$e

Reguła eliminacji takiego spójnika jak "$\supset$" jest porównywalna do reguły odrywania dla "$\supset$" w systemie aksjomatyki klasycznej, lecz jej kontekst użycia w F jest bardzo odmienny. Reguła wprowadzenia "$\supset$" opiera się na następujących zasadach: aby wprowadzić "$\supset$" między dwa dowolne wyrażenia P, Q, należy przyjąć P jako hipotezę i otrzymać Q za pomocą reguł systemu, tj.:

(n)	P	hip
		.
(m)	Q	.
	$P \supset Q$	(n) - (m), $\supset$i

Łącznik między (n) i (m) wskazuje, że to wszelka pod-dedukcja P do Q ustanawia $P \supset Q$. Z drugiej strony, ta reguła może być użyta w trakcie jakiejkolwiek dedukcji. Zaznacza się to przez drugą kreskę pionową z lewej, od P do $P \supset Q$.

$$\text{reguła } \supset i \qquad \begin{array}{l|l|ll} (n) & & P & \text{hip} \\ & & \vdots & \\ (m) & & Q & \\ & P \supset Q & & (n) - (m),\ \supset i \end{array}$$

Formuła $P \supset Q$ nie zależy już od hipotezy P, reguła taka ($\supset i$) uwalnia dedukcję od hipotezy.

Niech będzie formułą "$p \supset (q \supset p)$". Pokaże się teraz, jak stosować się będzie tutaj reguły poprzednio wprowadzone. Przyjmie się jako hipotezę pierwszy człon formuły, tak jak gdyby wychodziło się z aksjomatu w systemie klasycznym i zastosuje się reguły dedukcji według potrzeb.

$$\begin{array}{l|l|l|ll} 1) & & p & & \text{hip} \\ 2) & & & q & \text{hip} \\ 3) & & & p & (1),\ \text{reit} \\ 4) & & q \supset p & & (2) - (3),\ \supset i \\ 5) & p \supset (q \supset p) & & & (1) - (4),\ \supset i \end{array}$$

Kreska pierwsza, najbardziej na lewo, jest wprowadzona przez wiersz 5. Tak jak dla systemu klasycznego można wprowadzić definicje. Nazwie się F′ rozszerzenie F wzbogacone następującymi elementami:

Niech będzie $P \vee Q \underset{df}{\equiv} (P \supset Q) \supset Q$

$$\text{reguła pow.} \quad \begin{array}{l|l} (n) & (P \supset Q) \supset Q \\ \hline & P \vee Q \end{array} \qquad \text{reg. exp.} \quad \begin{array}{l|l} (n) & P \vee Q \\ \hline & (P \supset Q) \supset Q \end{array}$$

Użycie wymienionych reguł zapisywania porównywalne jest ze stosowaniem reguł systemów aksjomatycznych. Zapewniają one eliminację definiendum i równoważność wyrażeń postaci "$P \vee Q$" i "$(P \supset Q) \supset Q$". Z drugiej strony nietwórczy charakter definicji może być mimo braku aksjomatów ustanowiony, jeśli określiło się pojęcie twierdzenia.

Twierdzeniem F będzie zwana wszelka formuła wyprowadzalna z pustej klasy hipotez. Graficznie będzie to wyrażone wykorzystaniem kreski pionowej wtedy, gdy nie będzie użyta kreska pozioma. W ten sposób "$p \supset (q \supset p)$" jest twierdzeniem F[19].

Należy udowodnić, że F i F′ mają te same twierdzenia po-

19 Przeciwnie do sytuacji systemów logicznych klasycznych, w których każdy wiersz dedukcji jest tezą, zastosowanie reguły F nie zawsze wytwarza tezę. Widać to świetnie na przykładzie dedukcji przedstawionej wyżej.

staci implikacji[20]. Jest oczywiste, że każde twierdzenie F jest także twierdzeniem postaci implikacyjnej F´ i odwrotnie. Założy się, że będzie taka formuła "M ⊃ N", która byłaby twierdzeniem F´, lecz nie byłaby twierdzeniem F. Gdyby tak było, to reguły dedukcji nie byłyby przestrzegane bądź nie mogłaby być użyta reguła ogólna bo nie występują w niej funktory, które winny występować w formułach[21].

Zatem jeśli M ⊃ N jest dedukowalna w F´ bez wykorzystania reguł (red) ani (exp), to M ⊃ N jest także wyprowadzalne w F. Formuła M ⊃ N w F´ i F zawiera takie same funktory, gdy wymienione reguły nie są stosowane. Natomiast, gdy reguły te są wykorzystywane, to formuła nie zawiera tych samych funktorów. Załóżmy, że wyprowadzenie M ⊃ N w F´ wykorzystuje tylko reguły F i regułę rozszerzania. Każde wyrażenie "z" zastąpione zostanie symbolem "v" przez odpowiednią formułę implikacyjną. Użycie reguły rozszerzania może być pominięte jako bezprzedmiotowe, bo jeśli reguła rozszerzania była zastosowana w F´, to w miejscu formuły "P ∨ Q", występować będzie formuła "(P ⊃ Q) ⊃ Q". Jeżeli reguła rozszerzania w ogóle nie będzie zastosowana, to ciąg dedukcyjny jest już także dedukcją w F. Jeśli więc implikacja M ⊃ N jest wyprowadzalna w F´, to jest również wyprowadzalna w F.

Przyjmijmy teraz, że do wyprowadzenia wyrażenia M ⊃ N w F´ wykorzystuje się tylko reguły F i regułę redukcji (red.). Zastąpi się symbol "v" w każdym wyrażeniu M ⊃ N przez odpowiednią formułę implikacyjną, gdyż reguły dedukcji są stosowane.

Nie ma formuły postaci implikacji, która byłaby twierdzeniem F´, a nie byłaby twierdzeniem F. Dana definicja nie jest zatem twórcza względem F.

Zostało przedstawione pojęcie definicji wyraźnej lub bezpośredniej w systemie formalnym. Narzuca się tu analogia z pojęciem definicji znanym z geometrii klasycznej. W systemie euklidesowym definicją będzie np. wypowiedź "punkt jest to to, co nie ma części" i inne wypowiedzi mające podobny status. Zauważyć należy, że

---

20 Wszystkie twierdzenia F mają oczywiście postać implikacji F´ są kształtu P ∨ Q lub P ⊃ Q, P i Q, gdzie "v" 0 razy, 1 raz, ..., n razy.

21 W F´ wszelka dedukcja (która nie wykorzystuje exp) twierdzenia implikacyjnego M ⊃ N winna wykorzystywać ⊃e, ponieważ to jest jedyna reguła zdolna wyeliminować "v" w trakcie dedukcji. Trzeba i zawsze wystarcza to do tego, żeby dedukował formułę P zawierającą "v" i formułę P ∨ Q, gdzie Q nie zawiera "v". Co do wprowadzenia pierwszej formuły zawierającej "v" to może być ona wprowadzona tylko przez hip w dowolnej dedukcji, nie stosującej réd.

charakter języka potocznego nie pozwala stwierdzić czy definicja ma charakter językowy, czy metajęzykowy. Definicję euklidesową można spotkać często w historii filozofii (Spinoza, Kartezjusz)[22].

Krytykując metodę euklidesową, wskazywano na to, iż na początku systemu winny znajdować się terminy pierwotne, a nie definicje. Podkreślano, że definicja może być traktowana jako wyrażenie uzupełniające względem systemu bądź jako interpretacja[23]. W koncepcji Hilberta używa się języka potocznego nie nadając treści terminom takim, jak "punkt", "prosta", "płaszczyzna". Traktuje się te terminy podobnie jak symbole systemu formalnego niezinterpretowanego. U Hilberta definicje w sensie euklidesowym występują przed aksjomatami i nadają im treść. Symbole pierwotne systemu występujące w aksjomatach są definiowane przez aksjomaty, co jest zwane "definicją implicite". W ten sposób w systemie Ł (pochodzącym od Łukasiewicza) posiadającym tę samą składnię i reguły co TB oraz jedyny aksjomat będący równoważnym aksjomatem TB:

$$((p \supset q) \supset m) \supset ((m \supset p) \supset (n \supset p))$$

symbol "⊃" jest definiowany aksjomatycznie. Będzie to inny typ definicji kontekstowej[24].

Definicja "implicite", podobnie jak definicja "explicite" (wyraźna) powinna spełniać warunek zupełności. Definicja "implicite" bywa często określona jako "definicja przez postulaty", będąc jedną z odmian tych definicji[25].

Stwierdzając, że w systemie zinterpretowanym symbol pierwotny lub raczej zbiór symboli pierwotnych jest definiowany "implicite" mówi się, że każda interpretacja spełniająca aksjomaty czyni każdy symbol reprezentantem pewnej dziedziny interpretacji. W tych dwóch płaszczyznach definicja "implicite" pozwala na wyeliminowanie definicji euklidesowej. Dodać należy, że nawet w aksjomatyce treściowej (jak ją określa Hilbert) nie można cofać się w nieskończoność i istnieje konieczność poznania założeń, aby móc

---

[22] Por. H. A. W o l f s o n, The philosophy of Spinoza, Meridian Books, Inc., New York 1958, s. 40 i n.

[23] W pierwszym przypadku definicja jest wypowiedzią wewnątrzsystemową, a w drugim pozostaje poza systemem.

[24] Jeżeli żaden aksjomat systemu formalnego nie zawiera symbolu definiowanego i jeśli symbol ten pojawia się tylko w konkluzji reguły dedukcji, to reguła ta definiuje go "implicite". Definicja jest dysjunktywna, jeśli wiele reguł zawiera w konkluzjach symbol definiowany. W systemie F, w którym nie ma aksjomatów, "⊃" jest definiowana "implicite" przez reguły.

[25] Będzie się odróżniać "definicję przez postulaty" od nazywania definicjami zbiorów postulatów (aksjomatów) w matematyce niesformalizowanej.

je ocenić. W aksjomatyce treściowej definicja będzie zastąpiona przez intuicyjne potraktowanie terminów.

Jeśli chodzi o relacje między definicją formalną wyraźną (explicite) a definicją w potocznym sensie tego słowa, to można wskazać, że odróżnia je charakter bezpośrednio semantyczny definicji potocznej i pośrednio semantyczny definicji (explicite) wyraźnej. Definicja zwykła grupuje słowa, a definicja formalna - symbole. W odniesieniu do tych dwóch różnych typów języków definicja pełni tę samą funkcję eliminacyjno-tłumaczącą. Jak mówi Quine o definicjach wyraźnych właściwych systemom formalnym, "należy je traktować nie jako formuły pomocnicze w języku, lecz jako połączenia między dwoma językami, z których jeden stanowiłby część drugiego"[26].

TB jest np. językiem dysponującym symbolem implikacji, zaś inny język dysponuje symbolem alternatywy. Definicja pokaże, że symbol alternatywy pozwala się zastąpić za pomocą implikacji:

$$"P \vee Q \underset{df}{=} "(P \supset Q) \supset Q"$$

Podobnie w języku potocznym można mówić o takim języku, który dysponuje wyrażeniami "córka x", "mąż x" i takim, który dysponuje wyrażeniem "zięć x". Definicja wiąże te języki następująco: "zięć x" znaczy tyle co "mąż córki x".

Podobieństwo między definicjami w systemach formalnych i w języku potocznym dostrzec można poprzez następujące własności:

1) w wyrażeniach tych identyfikacja sensu dwóch wyrażeń dokonuje się za pomocą łącznika,

2) w definiensie występują tylko terminy już znane, czyniące definiendum zrozumiałym,

3) prawdziwość definicji jest ustanowiona bądź w sposób ostateczny, bądź zależnie od reguł użycia definicji, bądź w sposób pośredni między tymi skrajnymi możliwościami.

Definicje najczęściej bywały traktowane jako ustanowienia arbitralne, mające charakter preskryptywny. Whitehead i Russell stwierdzali, że definicja relatywizowana do jakiegoś systemu formalnego niezinterpretowanego byłaby wyrażeniem woli, a nie zdaniem orzekającym i dlatego nie poprzedzali definicji znakiem asercji[27].

---

[26] W. W. O. Quine, Two Dogmas of Empiricism, "The Philosophical Review" 1951, vol. 60 i w: From a Logical Point of View, Harvard University Press, Cambridge, Mass., 1953.

[27] Symbol "$\vdash$" wyraża także wolę, gdyż pozwala ona odróżnić P jako "lexis" od P jako asercji $\vdash$ P.

Definicje o charakterze preskryptywnym są dopuszczalne tylko wówczas, gdy można traktować podobnie definiowanie i ustanawianie praw (reguł). Gdyby preskryptywizm w każdym wypadku był dopuszczalny to, jak mówi Quine, dowolnemu definiensowi odpowiadałoby dowolne definiendum[28]. Nawet w systemie formalnym nie można wprowadzać definiendum przypisując mu dowolny definiens.

W systemach formalnych nie da się odróżnić takich definicji, które skracają wyrażenia dążąc do prostoty i tych, które czynią to, pokazując w ten sposób związek między dwoma językami, o czym wspomniał Quine. Whitehead i Russell piszą np.:

3.02 $p \supset q \supset m \overset{df}{=} (p \supset q) \cdot (q \supset m)$,

4.02 $p \equiv q \equiv m \overset{df}{=} (p \equiv q) \cdot (q \equiv m)$,

10.02 $fx \supset_x qx \overset{df}{=} \forall_x (fx \supset qx)$,

13.02 $x \neq y \overset{df}{=} \sim (x = y)$,

20.04 $x, y \in \alpha \overset{df}{=} (x \in \alpha) \cdot (y \in \alpha)$,

a z drugiej strony:

1.01 $p \supset q \overset{df}{=} \sim p \vee q$,

9.0111 $\sim(\forall_x fx) \overset{df}{=} \exists_x \sim fx$[29].

Istnieje oczywiście duża różnica między tymi dwoma grupami definicji, gdyż dzięki drugiej teoria ma zasięg semantyczny, do którego należy wyrażenie definiowane.

Whitehead i Russell wskazują[30], że definicje pierwszej grupy, "służą jedynie do skracania dowodów" (s. 109) "dostarczają tylko dogodnych skrótów" (s. 117) i "są stosowane po prostu dla potrzeb skrótu" (s. 190).

Zauważyć trzeba, że symbol "$\overset{df}{=}$" może pełnić różne funkcje. Jeżeli "$\overset{df}{=}$" jest używany po to, aby wprowadzić definicje drugiej grupy, trzeba by użyć symbolu innego niż wtedy gdy wprowadza się definicje pierwszej grupy, w których definiendum jest odmiennie przekładalne. Jeżeli zapisuje się "p $\underset{df}{=}$ pada" to znaczy, że chodzi tym razem o wprowadzenie interpretacji systemu formalnego, a nie o prostotę zapisu bądź o związek między dwoma językami

[28] W. V. O. Quine, Truth by Convention, [w:] H. Feigl, W. Sellars, Readings in Philosophical Analysis, New York 1949, s. 252.

[29] A. N. Whitehead, B. Russell, Principia Mathematica, At the University Press, Cambridge 1967. Przepisano część wyrażeń używając symboliki używanej w artykule.

[30] Ibidem.

mi formalnymi. Jeżeli pisze się "P $=_{df}$ (p ⊃ q)", to chodzi tu o relację "...oznacza w metajęzyku...". Nazywa się często definicją każde zdanie równoznaczne, takie jak "Księżyc jest naturalnym satelitą Ziemi", ponieważ zachodzi implikacja w obie strony, a zatem i równoważność między "x jest Księżycem" i "x jest naturalnym satelitą Ziemi".

Takie użycie, które określa się jako definicje słownikowe przeciwstawia się definicjom zwanym "absolutnymi". Odpowiadałoby temu także zdanie "Księżyc jest planetą najbliższą Ziemi". Własność bycia definicją pozostaje w rzeczywistości niezdeterminowana, ponieważ nie wiadomo czy definiens może być złożony z terminów, które same w sobie są niezdefiniowane. Tak więc, jeśli chce się uniknąć błędnego koła w definicjach, zakłada się, że istnieją terminy niezdefiniowane, które wykluczać się będą z tymi, za pomocą których się definiuje. Zresztą za tym idzie to, że nie można naprawdę rozróżnić w tym języku naturalnym definicji, która byłaby analogiczna do aksjomatów systemu formalnego, tzn. do założeń. Definicja zwykła, w sposób dwuznaczny ma dwa różne statusy: status aksjomatu i status definicji formalnej.

Nie należy stąd wnioskować o dyskwalifikacji definicji zwykłych czy słownikowych. Bez języka naturalnego język formalny byłby zbiorem znaków niczego nie wyrażających. Z tego względu jest znamienne to, iż Whitehead i Russell poprzedzali aksjomaty wyjaśnieniami dotyczącymi terminów pierwotnych. Te wyjaśnienia zajmują podobne miejsce, jakie zajmowała definicja euklidesowa. Autorzy zauważają, że nie tworzą one jednak definicji[31].

Żadna definicja implicite (ani explicite w sensie ścisłym) nie może zastąpić tego tłumaczenia. Z drugiej strony, ujęcie w ścisłą formę definicji słownikowych, z wyjątkiem ograniczonych dziedzin, nie jest stosowane. Kryteria formalne przekładalności, nietwórczości itd. nie wycofują z użycia dawnych prawideł retorycznych.

Nie jest powszechnie przyjmowany pogląd, że definicja jest wypowiedzią, która nie powinna należeć do systemu. Na tej idei opiera się przedstawiona poprzednio teoria definicji wyraźnych (explicite), którą można nazwać "klasyczną" lub "metajęzykową". Inna koncepcja, której promotorem był Leśniewski, zwana jest "wewnątrzjęzykową". Modyfikuje ona problem twórczości definicji, a nawet filozofii systemu formalnego.

[31] Ibidem, s. 91.

Zdarza się, że koncepcji klasycznej zarzuca się konieczność wprowadzenia do alfabetu dodatkowego symbolu pierwotnego, a mianowicie "$\underset{df}{=}$" (TB np. zawierałby "$\underset{df}{=}$" i "$\supset$", a nie tylko "$\supset$"), jak również wprowadzenie dodatkowych dwóch reguł dedukcji ponad te które są w systemie (TB np. zawierałby reguły rozszerzania i redukcji, łącznie z "$\underset{df}{=}$", a nie tylko reguły podstawiania i odrywania związane z "$\supset$"). System nie respektowałby więc norm efektywności, do których rości sobie prawo.

Kiedy dowodzi się zupełności symboliki systemu, którego jedynym funktorem jest "$|$" (tzn. definiowalności każdego innego funktora w tym języku), dowodzi się tylko zupełności systemu "$|$", "$\underset{df}{=}$".

Ponieważ według tej koncepcji, to właśnie symbol "$\underset{df}{=}$" wprowadza się bezpodstawnie do systemu, powstaje problem, jak można by po wykluczeniu symbolu "$\underset{df}{=}$" znaleźć wśród elementów pierwotnych ten, który byłby zdolny do pełnienia tej roli. Jest łatwo stwierdzić, że "$\underset{df}{=}$" nie jest ukrytym symbolem pierwotnym ani reguły rozszerzania i reguły redukcji nie są nie uznanymi regułami dedukcji.

W "Principia Mathematica" Whitehead i Russell używają symbolu asercji "$\vdash$" jako terminu pierwotnego ich systemu na tej samej zasadzie co "$\sim$" i "$\vee$"[32]. Ponieważ żadna reguła formowania nie opiera się na "$\vdash$", można by powiedzieć za Wittgensteinem, że "on nie należy bardziej do struktury zdania niż numer zdania"[33]. Autorzy ci regułę odrywania postaci: "$\vdash p$" i "$\vdash p \supset q$", zatem "$\vdash q$", zapisują tak: "$\vdash (p \vee p) \supset p$". Podkreślają wielokrotnie, że skoro definicje są "wprowadzane ze względów praktycznych i są teoretycznie niekonieczne"[34] to z jednej strony trzeba by powiedzieć ściślej, że: "symbol »... = ... Df« [stosowany do definiowania w "Principia Mathematica"] nie jest symbolem pierwotnym". Z drugiej strony trzeba by rozróżnić status symboli "... = ... Df" "$\vee$" i "$\vdash$", szczególnie określając reguły formowania.

Poszukując innych racji dla usunięcia symbolu "$\underset{df}{=}$" i reguł związanych z jego użyciem, można wymienić przynajmniej dwie:

---

[32] Ibidem, s. 12, 91.

[33] L. W i t t g e n s t e i n, Tractatus Logico-philosophicus, Warszawa 1970, 4. 442.

[34] Ibidem, s. 94 (por. też s. 11).

1) Korzystne jest respektowanie praktyki definiowania w językach naturalnych, w których definicje są wypowiedziami języka przedmiotowego: (np. sześciobok jest wielobokiem o sześciu bokach), a nie wypowiedziami metajęzyka: (słowo "sześciokąt" jest definiowane jako "wielokąt o sześciu bokach"),

2) Byłoby wskazane tak zintegrować system, aby wszystkie elementy, które początkowo zostały zapożyczone z innych języków, mogły być wyrażone w przyjętym języku.

W ten sposób można przyjąć system, w którym np. "$\vdash$" i "/" byłyby w alfabecie na podobnych prawach jak są w nim "$\sim$", "v" itd. i w którym aksjomaty i reguły dotyczyłyby tych symboli. Redukuje się użycie metajęzyka, chociaż powiększa się długość dowodów w systemie i pewne metatwierdzenia systemów zwykłych stają się twierdzeniami systemu rozszerzonego[35]. W systemie klasycznym definicja wyraża się w pewnych formułach systemu i stanowi odmienne ich sformułowanie.

Jeśli symbol funktora musiałby zastąpić "$\equiv_{df}$", to symbolem, który wydaje się być najbardziej odpowiedni jest "=", czyli równoważność, ponieważ $P \equiv_{df} Q$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\models P \equiv Q$. Z drugiej strony w każdym systemie rachunku zdań syntaktycznie i semantycznie zupełnym, dysponującym jedynie regułami podstawiania i odrywania, regułą (wtórną) byłaby następująca reguła "zastępowania równoważności":

$$R_e \quad \frac{\vdash M[P], \ \vdash P \equiv Q}{\vdash M[P \mathbin{//} Q]}$$

lub w innej postaci

$$R_e' \quad \frac{\vdash M[Q], \ \vdash P \equiv Q}{\vdash M[Q \mathbin{//} P]}$$

gdzie $M[P \mathbin{//} Q]$ wskazuje zastąpienie, jednego lub więcej, występowania P przez Q w M.

Ponieważ definicje, mając postać $P \equiv Q$, są tautologiami i tezami systemu, więc R_e zastosowana do definicji daje ten sam efekt co reguła rozszerzania; R_e' zastosowana do tej samej definicji - daje ten sam rezultat co reguła redukcji, przynajmniej kiedy stosuje się je do $\vdash M[P]$ lub do $\vdash M[Q]$.

Ograniczenie przekładalności symbolu definiowanego występuje w postaci definicji warunkowej spotykanej często w matematyce.

35 Por. P. C. Rosenbloom, The elements of mathematical logic, Dover Books, New York 1950, s. 40-43.

P. Suppes podaje prosty przykład (który można by sformułować ściśle w rachunku predykatów).

Przypuśćmy, że definiuje się dzielenie przez:

(jeśli $y \neq 0$ to $x/y = z$)

wtedy i tylko wtedy, gdy "$(x = y \cdot z)$". Nie można oczywiście wyeliminować symbolu "/" z wyrażenia:

$1/0 = 1/0$

Zdaniem Suppes'a można zadowolić się możliwością wyeliminowania tego symbolu, we wszystkich przypadkach "interesujących", czyli spełniających hipotezę: "jeśli $y \neq 0$"[36].

Jeśli symbol "≡" należy do symboli pierwotnych systemu syntaktycznie i semantycznie zupełnego, to do korzystania z definicji wystarczają jedynie reguły podstawiania i odrywania[37]. Okazuje się, że system, w którym "≡" jest funktorem pierwotnym, jedynym, nie jest syntaktycznie zupełny, trzeba więc go uzupełnić i nałożyć na funktory pierwotne warunek wzajemnej niezależności. Ustala się, że system "≡, ~" będzie niezupełny, a systemy "≡, ~, ⊃"; "≡, ~, ." będą zupełne, lecz pierwszy z funktorów będzie definiowalny za pomocą dwóch pozostałych; systemy "≡, ~, /"; "≡, ~, ↓" będą zupełne, lecz trzeci wystarczy do zdefiniowania dwóch pozostałych itd.

Pomiędzy rozwiązaniami możliwymi system "≡, w, v" jest zarazem zupełny syntaktycznie[38] i utworzony z funktorów niezależnych. Tak samo system "≡, v" i stała "O"[39]. W każdym systemie "≡, w, v" (lub "≡, v, O" itd.) semantycznie zupełnym, definicje będą zatem wprowadzane przez funktor systemu i operować się nimi będzie przy użyciu reguł systemu.

Podobnie jak sądzi Leśniewski, stwierdzić można, że definicje

---

[36] S u p p e s, op. cit., s. 165 (Rozważyć ograniczenie szczególne dla tego typu definicji).

[37] R_e i $\dot{R}_e$ są również regułami wtórnymi każdego systemu równoważnego semantycznie, zupełnego (z regułami podstawiania i odrywania), ale ponieważ wszystkie formuły P, Q, M zawierają tylko funktory typu "≡", nie można stosować reguł R_e i $\dot{R}_e$ tego systemu do definicji $P \equiv Q$, gdzie P zawiera jakikolwiek funktor zdefiniowany, tzn. taki, który nie jest funktorem "≡".

[38] System "v, ~" jest zupełny syntaktycznie i "~" definiuje się w systemie. W rezultacie: "$\sim p \equiv (p \equiv (p \le p))$".

[39] Zdarza się, że pomija się ten obowiązek niezależności, ale tylko dla powodów dydaktycznych (por. C h u r c h, op. cit. s. 133). Aby wprowadzić, te definicje Lewis używa równoważności ścisłej, która jest wśród terminów pierwotnych systemu razem z "~", ".", "◇", lecz wskazuje on, że równoważność jest definiowalna przez terminy wtórne. C. I. L e w i s, C. H. L a n g f o r d, Symbolic Logic, Dover Publications, Inc., New York 1959, s. 123-124.

mogą być wprowadzone przez jakikolwiek funktor pierwotny lub ich zbiór w taki sposób, aby utworzyć wyrażenie mające tabelę prawdziwościową "$p \equiv q$", ponieważ to wyrażenie będzie można zastąpić "$\equiv$". Niech będą dane terminy pierwotne: "$\supset$, $\cdot$": wyrażenie "$(p \supset q) \cdot (q \supset p)$" jest równoważne "$p \equiv q$". Definicja wewnątrzjęzykowa wyrażenia "$p \equiv q$" będzie zatem miała postać

$$((p \equiv q) \supset ((p \supset q) \cdot (q \supset p))) \cdot (((p \supset q) \cdot (q \supset p)) \supset (p \equiv q)).$$

Pozostaje zauważyć, że w każdym przypadku, jeśli system dysponuje regułą zastępowania równoważności, to pozwala to nie korzystać z reguł rozszerzania i redukcji[40].

Występuje u Leśniewskiego jeszcze inne wymaganie, dotąd pomijane. Jest to żądanie powszechnej ważności praw logicznych, a zatem i definicji explicite. Realizuje się to poprzez wprowadzenie kwantyfikatora ogólnego dla każdej zmiennej występującej w formule. Kwantyfikatory są zatem wprowadzane do rachunku zdań. Symbole "$\equiv$" i "$\forall$" powinny więc należeć do wyrażeń pierwotnych systemu. Ponieważ taki system jest syntaktycznie niezupełny, winien być uzupełniony. Tarski pokazał, że można to zrobić dołączając zmienną funkcyjną "δ" (pochodzącą od Leśniewskiego). Niech będzie dana formuła zdaniowa α, $\delta\alpha$ reprezentuje każdą funkcję prawdziwościową zawierającą α; "δ_p" np. reprezentuje "p", "$\sim p$", "$p \supset q$" itd. Można pokazać przykładowo, że $p \cdot q$ definiuje się jako

$$(p \cdot q) \equiv \forall \delta\ (p \equiv (\delta_p \equiv \delta_q)).$$

Pozostaje zatem skwantyfikować ogólnie $p \cdot q$. Otrzymuje się:

$$\forall_p \forall_q (p \cdot q) \equiv \forall \delta\ (p \equiv (\delta_p \equiv \delta_q))$$[41].

Zauważa się, że w takiej definicji eliminacja funktora definiowanego "b" nie może być zrealizowana w każdej formule, ale tylko w tych, które mają postać "$\forall p\ \forall q\ (p\ b\ q)$". Kwestię najważniejszą przedstawia jednak kryterium nietwórczości.

Zdarza się, że definicja wewnątrzjęzykowa będzie twórcza, czego przykład spotykamy u Łukasiewicza. Niech będzie dany system, gdzie "$\equiv$" jest jedynym funktorem pierwotnym. W systemie tym występuje jeden aksjomat

$$A:\ (n \equiv (p \equiv p)) \equiv ((n \equiv (p \equiv p)) \equiv ((p \equiv q) \equiv ((m \equiv q) \equiv (p \equiv m))))$$

[40] Pewne definicje mogą być wprowadzone przez identyczność ("=" obecną w systemie, różną od "$\equiv_{df}$", zewnętrzną względem systemu), np.: "2 = 1 + 1". Definiendum i definiens są więc terminami, nie formułami.

[41] A. N. Prior, Formal Logic, At the Clarendon Press, Oxford 1963, s. 95 i n.

i reguły: podstawiania (RD_1) i odrywania (RD_2). Jeśli definicja:

$\forall p \equiv (p \equiv p)$

jest dołączona do systemu, to można w nim wyprowadzić twierdzenie:

$(p \equiv q) \equiv ((m \equiv q) \equiv (p \equiv m))$,

zatem można ustalić, że będzie ono niezależne od aksjomatu:

1) $\forall p \equiv (p \equiv p)) \equiv ((\forall p \equiv (p \equiv p)) \equiv ((p \equiv q) \equiv ((m \equiv q) \equiv (p \equiv m))))$ A n/Vp,

2) $\forall p \equiv (p \equiv p)) \equiv (p \equiv q) \equiv ((m \equiv q) \equiv (p \equiv m))))$ 1) df x RD_2,

3) $(p \equiv q) \equiv ((m \equiv q) \equiv (p \equiv m)$ 2) df x RD_2.

Jeśli definicja jest utworzona poza systemem za pomocą symbolu "$\equiv_{df}$", to twierdzenia tego wyprowadzić nie można.

Taką samą sytuację można spotkać w systemie pozalogicznym normalnie sformalizowanym. Pokazane to zostanie na przykładzie pochodzącym od Suppesa:

Niech będzie system, w którym "o" jest jedynym symbolem pierwotnym pozalogicznym i którego jedynym aksjomatem jest:

$x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$.

Definicja stałej indywiduowej "e" przez:

$x \circ e = x$

jest twórcza, gdyż można wydedukować z niej formułę

$\exists y \forall x ((x \circ y) = x)$,

w której pojawia się tylko symbol pierwotny systemu pozalogicznego, nie dedukowany z aksjomatu[42].

W tym przykładzie, podobnie jak i w poprzednim, mamy możliwość stosowania reguły dedukcji do definicji, dlatego, że stała się ona tezą, sprawiającą, iż definicja staje się twórcza. Wypełniła ona rolę dodatkowego aksjomatu. Osłabiając różnicę między aksjomatem i definicją Leśniewski wydobywa cechy definicji euklidesowej i zwykłej. Cecha twórczości definicji nie wydaje się mu wadą. Przeciwnie, ocenia, iż co najmniej w systemie pewnego typu definicja winna być tak twórcza, jak to możliwe. Dostrzec tu można odmienną filozofię systemu formalnego. By ją usytuować należy rozpocząć od wyróżnienia 4 możliwych pozycji. Jeżeli, krótko mówiąc, nazwie się "twórczą" koncepcję, która podnosi wartość definicji twórczych, a "nietwórczą" koncepcję, która ich zakazuje, można podtrzymywać tezę (1) metajęzykową i nietwórczą lub (2) wewnątrzjęzykową i nietwórczą, lub (3) metajęzykową i twórczą i wreszcie (4) wewnątrz-

---

[42] S u p p e s, op. cit., s. 154-155.

językową i twórczą. Pierwsze rozstrzygnięcie jest rozwiązaniem klasycznym. Drugie jest właściwe dla wielu autorów, jak Suppes, zwłaszcza w ramach systemu pozalogicznego, ponieważ ten będąc rozszerzeniem wybranego systemu logiki, rozporządza środkami wprowadzania definicji bez wychodzenia poza język wykorzystywany. Przy czym zakaz definicji twórczych, cechujący istotę stanowiska klasycznego, jest podtrzymywany. Trzecie rozwiązanie jest odrzucane przez obydwa pierwsze stanowiska. Czwartym jest rozwiązanie Leśniewskiego, przeciwstawiające się najsilniej pozycji klasycznej. Dla niego zbiór potrzebnych terminów pierwotnych winien znajdować się na początku systemu i poprzedzać zbiór aksjomatów. Przyjmuje się, że aksjomat byłby wprowadzony wtedy, gdy istnieje potrzeba korzystania z niego; podobnie byłoby w przypadku terminów pierwotnych.

Jeśli stwierdzi się w trakcie rozbudowy systemu, że aksjomat bądź termin pierwotny stanowi przeszkodę dla otrzymania pożądanego rezultatu, to utworzy się nowy system wykluczający tenże aksjomat lub termin pierwotny.

Według koncepcji Leśniewskiego, winna istnieć możliwość wzbogacenia systemu symbolami i własnościami, których poprzednio nie posiadał. Definicje "implicite" zmieniają się wraz z rozwojem systemu. Nie wynika stąd jednakże, że będzie można uznać każdą modyfikację systemu, gdyż wtedy nie byłoby rozróżnialne budowanie nowego systemu od rozwijania istniejącego. To dlatego w szczególności w definiensie znaleźć można tylko symbole pierwotne lub już zdefiniowane i dlatego również symbol wprowadzający definicje winien należeć do tego samego systemu.

Można by żądać, aby żadna definicja nie mogła wprowadzać sprzeczności. Ponieważ istnieją reguły formowania i reguły dedukcji odnoszące się do danego systemu, potrzebne byłyby też reguły definicji tego systemu, równie precyzyjne i efektywne. Byłyby to reguły zakazujące identyfikacji definicji wewnątrzjęzykowych z aksjomatami. Według opinii Churcha, która reprezentuje stanowisko klasyczne, jeśli definicje winny być tezami systemu, to trzeba żeby istniały ścisłe reguły ograniczające ich wprowadzenie[43].

---

[43] "d'autre part, une fois que les règles de définition ont été formulées avec précision, elles deviennent au moins théoriquement superflues parce qu'il serait toujours possible de surveiller par avance tout ce qui pourrait être introduit par définition et d'y pourvoir plutôt par des notations primitives incluses dans la base primitive du langage", C h u r c h, loc. cit., s. 76--78, przyp. 168.

Jeśli chodzi o problem twórczości definicji, to trudno rozstrzygnąć, w czym twórczość winna się wyrażać. Zdaniem Fregego "nawet matematyk nie może tworzyć rzeczy według swej woli, tak samo jak geograf; obaj mogą jedynie odkrywać to, co jest i nadawać nazwy"[44].

Zatem twórczość w matematyce przypomina nie tyle tworzenie z niczego, lecz raczej operacje dokonywane na istniejącym materiale.

Université Jean Moulin Lyon III
Faculté de Philosophie

Jean Pierre Ginisti

LES CRITERES LOGIQUES DES DEFINITIONS EXPLICITES

Nous nous proposons d'examiner certaines propriétés souvent exigées des définitions, principalement celles d'être éliminables et non créatrices, á'travers différents objectifs qu'on poursuit en définissant. Bien que les langues naturelles fassent usage de définition, nos développements auront pour axe la notion telle que les systémes formels la connaissent sous le nom de "définition explicite" ou "directe". Encore qu'il s'agisse d'une rationalisation du sens le plus courant, comme nous le verrons, nous ne voulons pas faire entendre qu'elle recoit lá son vrai sens - si du moins on comprenait qu'elle rend les autres hors d'usage - mais son emploi le plus codifié.

---

[44] G. F r e g e, Die Grundlagen der Arithmetik, eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl, Breslau 1884, § 96.