A C T A   U N I V E R S I T A T I S   L O D Z I E N S I S
FOLIA PHILOSOPHICA 5, 1988
https://doi.org/10.18778/0208-6107.05.04

Piotr Rydzewski, Tomasz Zabolski

TEORIA JAKOŚCI

Można przyjąć model ontologiczny, w którym każda rzecz jest utożsamiana z własnościami, które posiada (pojęcie własności traktowane jest dosyć szeroko). Wyróżnienie wszystkich własności danej rzeczy nie zawsze jest możliwe, jednak nie wszystkie one są dla nas istotne. Wybieramy jedynie te, które ze względu na konkretny problem są najważniejsze.

Główną ideą pracy było formalne ujęcie przedstawionego modelu rzeczywistości. Własność została potraktowana jako pojęcie pierwotne i ujęta w system aksjomatów. Dalej teoria była rozbudowywana metodami matematycznymi, przy czym zwracaliśmy szczególną uwagę na jej związek z opisywanym modelem.

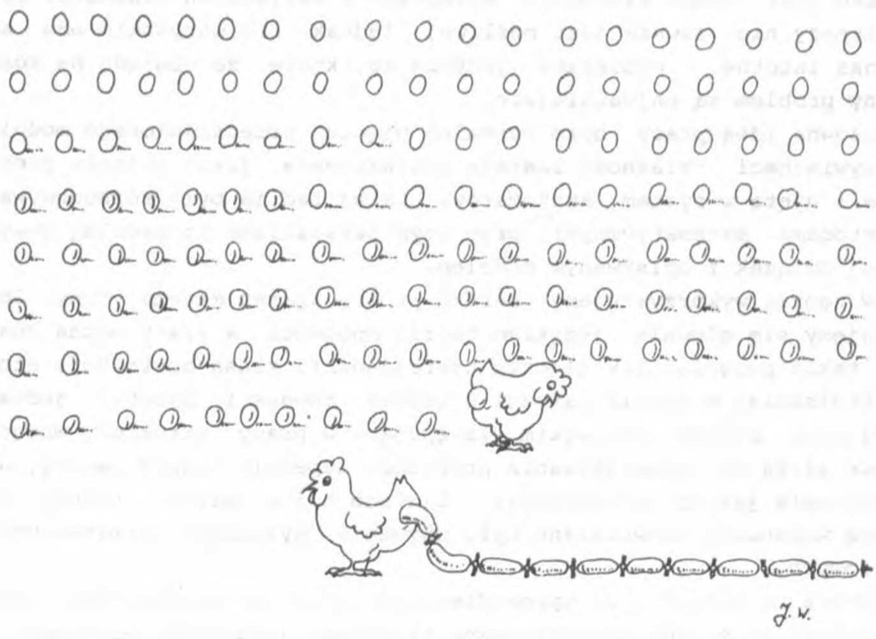
W teorii wykorzystujemy bardzo prosty aparat matematyczny. Posługujemy się głównie językiem teorii mnogości. W pracy można znaleźć takie pojęcia, jak iloczyn kartezjański, klasa abstrakcji etc.

Utożsamianie teorii jakości z teorią mnogości byłoby jednak niesłuszne. Przede wszystkim występujące w pracy struktury mnogościowe służą do rozwiązywania problemów zupełnie innej natury, analogicznie jak np. w topologii. Dlatego też w opisie rzeczy za pomocą własności niewskazane było używanie wyłącznie terminów mnogościowych.

Można by sądzić, że wprowadzenie pojęcia odniesienia było niepotrzebne, gdyż odniesienie można traktować jako klasę abstrakcji. Nie każda klasa abstrakcji jest jednak odniesieniem. Klasa abstrakcji jest pojęciem zbyt ogólnym. Dla odniesienia wprowadzone zostało dodatkowe ograniczenie. Do odniesienia obiektu a do własności ω nie może należeć jednocześnie θ i jakiś inny element przestrzeni Ω. Przedstawione ograniczenie formalnie zostało ujęte aksjomatem 1.

Twierdzenia i definicje znajdujące się w pracy służą jedynie uściśleniu dziedziny rozważań. Dlatego też tytuł pracy być może jest zbyt śmiały. Zdecydowaliśmy się nań, gdyż wiążemy duże nadzieje z opisem świata poprzez własności. Sądzimy, że podejście takie jest zgodne z niektórymi nowymi tendencjami w logice.

Teorię jakości pisaliśmy z myślą o zastosowaniach w informatyce, metodologii, naukach humanistycznych, społecznych itp. Utwierdza nas w przekonaniu o takich możliwościach jej zastosowanie (jeszcze dosyć skromne) w psychologii, o którym wspominamy w przykładzie 7. Poważniejsze zastosowania wymagają jednak dalszego rozwoju teorii. Można obecnie wskazać naturalne kierunki badań umożliwiające osiągnięcie tego celu.



Rys. 1

Podstawowym pojęciem pierwotnym naszych rozważań jest w ł a s n o ś ć. Własność traktowana zgodnie z intuicją jako jakaś cecha, np. kolor, kształt, masa, droga, czas itp. Pojęcie własności pozostaje niezdefiniowane, analogicznie do pojęcia zbioru w teorii mnogości. Własności będziemy oznaczać przez ω, ω_i itp.

Drugim pojęciem pierwotnym jest p r z e s t r z e ń j e d n o z n a c z n y c h o d n i e s i e ń d o w ł a s n o-ś c i. Jest to klasa wszystkich konkretnych desygnatów pojęcia danej własności, jak np. zbiór wszystkich kolorów, wszystkich konkretnych kształtów, wszystkich możliwych mas itp. Do przestrzeni jednoznacznych odniesień dołączymy w dalszym ciągu rozważań o d n i e s i e n i e p u s t e oznaczane przez $\ominus$.

Pewien obiekt ma odniesienie puste do własności ω, jeżeli nie posiada tej własności, tak jak np. dźwięk nie posiada masy czy kolor czasu. Przyjmujemy, że odniesienie puste jest identyczne dla wszystkich własności, to znaczy, że dźwięk odnosi się do masy w identyczny sposób, jak kolor do czasu. Przestrzenie jednoznacznych odniesień do własności ω, ω_i będziemy nazywać w skrócie p r z e s t r z e n i a m i o d n i e s i e ń i oznaczać przez Ω, Ω_i.

DEFINICJA 1: (N i e z a l e ż n o ś ć) Własności ω_1 i ω_2 nazywamy niezależnymi, jeżeli $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \{\ominus\}$.

Z formalnego punktu widzenia przyjmujemy, że mamy do czynienia z pewną klasą obiektów U, klasą $S = \{\omega_t\}_{t \in T}$, której elementy nazywać będziemy własnościami oraz z rodziną klas $\{\Omega_t\}_{t \in T}$, której elementy nazywać będziemy przestrzeniami odniesień do własności z klasy S. Istnieje jednoznaczna odpowiedniość między Ω_t i ω_t. W dalszych rozważaniach sformułowanie: "Niech A będzie dowolnym zbiorem", będzie oznaczać, że $A \subset U$. Dodatkowo zakładać będziemy, że dla każdego $t \in T$ $\Omega_t \subset U$.

Uwaga: Należy odróżnić zbiór pusty od odniesienia pustego tzn. $\emptyset$ od $\ominus$.

Własności ω_1 i ω_2 są więc niezależne, jeżeli żaden element z Ω_1 nie jest j e d n o c z e ś n i e desygnatem własności ω_2, tzn. np. nie istnieje takie a, że a jest jednocześnie kształtem i kolorem. Oczywiście a może mieć kształt i kolor, ale żaden kształt nie jest ex definitione na stałe związany z kolorem i na odwrót. Własności bycia kulą i bycia kształtem nie są niezależne, albowiem istnieje kształt, który jest jednocześnie kulą.

PRZYKŁADY

Przykład 1 (Klocki Dinesa)

Klocki te są używane w szkole do wprowadzenia pojęcia zbioru. Mają one różne kształty (kwadrat, trójkąt, koło), kolory (czerwony, żółty, niebieski, biały), grubości (gruby, cienki) oraz wielkości (mały, średni, duży). Każdy klocek charakteryzowany jest przez cztery własności - kształt, kolor, grubość, wielkość. Przykład ten dobrze ilustruje przestrzeń wszystkich odniesień do własności. Przestrzeń odniesień do koloru złożona jest z desygnatów pojęć: czerwony, żółty, niebieski, biały. Analogicznie określamy przestrzenie odniesień do kształtu, grubości i wielkości. Można np. postawić zarzut, że przedstawiona przestrzeń odniesień nie jest zbiorem desygnatów wszystkich możliwych kolorów. Zarzut ten nie jest jednak uzasadniony, gdyż własność jest określana przez przestrzeń odniesień. W tym znaczeniu własność koloru traktowana jest jako posiadanie jednego z czterech wymienionych kolorów.

Przykład 2 (Prędkość średnia)

Weźmy pod uwagę prędkość średnią v obliczoną jako $v = s/t$, gdzie s oznacza drogę przebytą od chwili rozpoczęcia ruchu, zaś t czas, który upłynął od tej chwili. Przestrzenie odniesień do własności drogi i czasu można traktować jako przestrzenie odniesień do własności bycia liczbą rzeczywistą nieujemną.

Przykład 3 (Potrzeby psychiczne człowieka)

Potrzeby te według Steina można scharakteryzować za pomocą 21 składowych (własności). Trudno jest powiedzieć czy są one zależne czy nie. Ponieważ własności te stanowią podstawę naszych rozważań, tzn. stanowią własności elementarne, musimy zgodnie z naszą subiektywną oceną rozstrzygnąć, jaka jest zależność między nimi.

Stein wyróżnia następujące potrzeby: wyczynu, poznawczą, tworzenia, bezpieczeństwa 1, bezpieczeństwa 2, stowarzyszania, uległości, żywienia i opiekowania się, porządku, zabawy, przyjemnych doznań zmysłowych, seksualną, doznawania opieki i oparcia, autonomii, izolacji, agresji, dominowania, ekshibicjonizmu, poniżania się, kompensacji, usprawiedliwiania się.

AKSJOMAT 1. Niech A będzie dowolnym zbiorem, zaś ω_1 dowolną własnością. Wówczas istnieją niezależne własności $\omega_2, \ldots, \omega_n$;

niezależne od ω_1, takie, że każdemu elementowi $a \in A$ przyporządkowany jest podzbiór $\Omega_1 x \ldots x \Omega_n$, przy czym jeśli X jest zbiorem przyporządkowanym elementowi $\bar{a} \in A$, Y jest zbiorem przyporządkowanym elementowi $a \in A$, to:

1. Jeżeli element postaci $(a_1, \ldots, a_{i-1}, \ominus, a_{i+1}, \ldots, a_n) \in X$, gdzie $a_k \in \Omega_k$, $k = 1, \ldots, n$, to żaden element w postaci $(b_1, \ldots, b_{i-1}, b_i, b_{i+1}, \ldots, b_n)$, gdzie $b_k \in \Omega_k$, $k = 1, \ldots, n$ i $b_i \neq \ominus$ nie należy do X.

2. Jeżeli $X \cap Y \neq \emptyset$, to $X = Y$.

Wniosek. Jeśli $(\ominus, \ldots, \ominus) \in X$, to $X = \{(\ominus, \ldots, \ominus)\}$.

Uwaga: Skomplikowana forma aksjomatu 1 może budzić wątpliwości, dlaczego elementowi $a \in A$ nie został po prostu przyporządkowany podzbiór Ω_1 (w tym także odniesienie puste). W pewnych sytuacjach "dopisywanie" własności (tak jak w aksjomacie 1) jest wskazane: Ilustruje to przykład 2. Przyjmijmy, że elementami zbioru A są prędkości średnie. Nie można powiedzieć, że konkretnej prędkości przyporządkowany jest ściśle określony czas t lub ściśle określona droga S. Każdej prędkości przyporządkować jednak możemy podzbiór iloczynu kartezjańskiego $\Omega_s \times \Omega_t$. Aksjomat mówi nam, że każdy obiekt z klasy U ma jednoznacznie określone swoje własności, tzn. że przyporządkowanie, o którym mówi aksjomat 1 jest z góry zadane.

Warunek 1 oznacza, że jeżeli jakiś obiekt odnosi się do jakiejś własności w sposób pusty, to nie może odnosić się do tej własności w sposób nie pusty, zaś warunek 2 oznacza, że jeżeli odniesienia pewnych elementów do jakichś własności się przecinają, to te elementy są pod względem tych własności nierozróżnialne.

DEFINICJA 2: (O d n i e s i e n i a) Niech A będzie dowolnym zbiorem, zaś $\omega_1, \ldots, \omega_n$, własnościami parami niezależnymi. Mówimy, że element $a \in A$ odnosi się do własności $\omega_1, \ldots, \omega_n$, jeżeli jest mu przyporządkowany podzbiór $\Omega_1 x \ldots x \Omega_n$. Jeżeli dodatkowo podzbiór ten nie zawiera elementów postaci:

$(a_1, \ldots, a_{i-1}, \ominus, a_{i+1}, \ldots, a_n) \in \Omega_1 x \ldots x \Omega_n$, gdzie $i \in \{1, \ldots, n\}$; to będziemy mówić, że element $a \in A$ odnosi się do własności $\omega_1, \ldots, \omega_n$ w sposób niepusty.

DEFINICJA 3: Niech A będzie dowolnym zbiorem i niech $a \in A$. Mówimy, że element a odnosi się do własności ω w sposób prawie jednoznaczny, jeżeli elementowi a przyporządkowany jest podzbiór Ω spełniający warunek 1, 2 aksjomatu 1.

Pojęcie odniesienia prawie jednoznacznego jest zawężeniem pojęcia odniesienia, a rozszerzeniem pojęcia odniesienia jednoznacznego. W przykładzie 1 mamy do czynienia z odniesieniami jednoznacznymi. W przykładzie 2 natomiast z odniesieniem, które nie jest jednoznaczne i nie jest prawie jednoznaczne, gdyż żadnej prędkości nie przyporządkowujemy określonego zbioru czasów ani określonego, ani zbioru dróg, tylko pewien zbiór par droga-czas. Przykład 3 ukazuje problem, jak jednoznaczność lub prawie jednoznaczność odniesienia zależy od interpretacji teorii psychologicznej. Jest to problem psychologii, a nie teorii jakości.

AKSJOMAT 2. Niech ω będzie pewną własnością, zaś $\omega_1, \ldots, \omega_n$, układem niezależnych własności. Jeżeli istnieje element $\bar{a} \in \Omega$ (Ω - zbiór wszystkich odniesień do własności ω), który odnosi się w sposób niepusty do własności $\omega_1, \ldots, \omega_n$, to wówczas dla dowolnego elementu $(a_1, \ldots, a_n) \in \Omega_1 x \ldots x \Omega_n$ istnieje taki element $a \in \Omega$, że element $(a_1, \ldots, a_n)$ należy do odniesienia elementu a do własności $\omega_1, \ldots, \omega_n$.

AKSJOMAT 3. Niech Ω będzie zbiorem wszystkich odniesień do własności ω. Jeżeli pewien element $a \in \Omega$ ma odniesienie prawie jednoznaczne do własności ω_1, to w przestrzeni Ω istnieje element a mający identyczne odniesienie do własności ω_1 jak a, natomiast do wszystkich innych odniesienie puste.

Aksjomaty 1 i 2 są mało intuicyjne, ale okażą się bardzo istotne w dalszym toku rozumowań.

Uwaga: Niech Ω_1, Ω_2 będą zbiorami wszystkich odniesień do własności ω_1, ω_2. Wtedy każdy element postaci (a_1, Θ) $\Omega_1 x \Omega_2$ będziemy utożsamiać z elementem $a_1 \in \Omega_1$, zaś każdy element postaci $(\Theta, a_2) \in \Omega_1 x \Omega_2$ z elementem $a_2 \in \Omega_2$.

TWIERDZENIE 1. Własności ω i $\omega_1, \ldots, \omega_n$ są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy własności ω i ω_j $j = 1, \ldots, n$ są niezależne.

Dowód: (niewprost) $\Rightarrow$ Przypuśćmy, że istnieje $a \neq \Theta$, $a \in \Omega \cap (\Omega_1 x \ldots x \Omega_n)$ oraz $\Omega \cap \Omega_j = \{\Theta\}$, $j = 1, \ldots, n$. Wówczas $a = (a_1, \ldots, a_n)$. Oznaczmy przez $a_{r_1}, \ldots, a_{r_k}$ te spośród $a_1, \ldots, a_n$, które są różne od Θ. Wtedy na mocy definicji a odnosi się w sposób niepusty do własności $\omega_{r_1}, \ldots, w_{r_k}$. Wobec aksjomatu 2 otrzymujemy, że istnieje $b \in \Omega$, którego odniesienie do własności $\omega_{r_1}, \ldots, \omega_{r_k}$ zawiera element postaci:

$$(*) \qquad (\bar{a}, \Theta, \ldots, \Theta),\ \bar{a} \in \Omega_{r_1} \text{ i } \bar{a} \neq \Theta$$

Wobec warunków aksjomatu 1 odniesienie elementu b zawiera tylko elementy postaci (*). Element b odnosi się więc do Ω_{r_1} w sposób prawie jednoznaczny. Jeżeli tak, to wobec aksjomatu 3 istnieje element $\bar{b} \in \Omega$ taki, że $\bar{b}$ odnosi się do ω_{r_1} w sposób identyczny jak b, a do wszystkich innych własności b odnosi się w sposób pusty; czyli $\bar{b} \in \Omega_{r_1}$. Ostatecznie więc $\bar{b} \in \Omega_{r_1} \cap \Omega$, co daje nam żądaną sprzeczność. $\Leftarrow$ Przypuśćmy teraz, że $\Omega \cap (\Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n) = \{\Theta\}$ oraz istnieją takie $j \in \{1, \ldots, n\}$ oraz $a \neq \Theta$ że $a \in \Omega \cap \Omega_j$. Wtedy element $(\Theta, \ldots, \Theta, a_j, \Theta, \ldots, \Theta) \in \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n$. Czyli wobec uwagi umieszczonej po aksjomacie 3 $a \in \Omega \cap (\Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n)$, co jest szukaną sprzecznością.

TWIERDZENIE 2. Własności $\omega_1, \ldots, \omega_k$ i $\omega_{k+1}, \ldots, \omega_n$ są niezależne, tzn. $(\Omega_1 \times \ldots \times \Omega_k) \cap (\Omega_{k+1} \times \ldots \times \Omega_n) = \{\Theta\}$ wtedy i tylko wtedy gdy własności ω_i i ω_j; $i = 1, \ldots, k$, $j = k+1, \ldots, n$ są niezależne.

<u>Dowód:</u> $\Rightarrow$ Podstawiając $\Omega = \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_n$ mamy wobec twierdzenia 1 $\Omega \cap \Omega_j = \{\Theta\}$, $j = k+1, \ldots, n$; stosując po raz drugi twierdzenie 1 otrzymujemy, że $\Omega_j \cap \Omega_i = \{\Theta\}$ dla $i = 1, \ldots, k$ oraz $j = k+1, \ldots, n$. $\Leftarrow$ Biorąc pod uwagę układy ω_i i $\omega_{k+1}, \ldots, \omega_n$; gdzie $i = 1, \ldots, k$ i stosując twierdzenie 1 otrzymujemy, że własności ω_i i $\omega_{k+1}, \ldots, \omega_n$ są niezależne. Oznaczając przez $\Omega' = \Omega_{k+1} \times \ldots \times \Omega_n$ i stosując jeszcze raz twierdzenie 1 otrzymujemy, że układy $\omega_1, \ldots, \omega_k$ i $\omega_{k+1}, \ldots, \omega_n$ są niezależne, co stanowi tezę twierdzenia.

TWIERDZENIE 3. Własności ω i ω_o są niezależne wtedy i tylko

wtedy, gdy każdy element $a \in \Omega$ ma puste odniesienie do własności ω_o i każdy element $b \in \Omega_o$ ma puste odniesienie do własności ω.

Dowód: $\Rightarrow$ (niewprost) Przypuśćmy, że istnieje element $a \in \Omega$ taki, że a odnosi się w sposób niepusty do własności ω_o. Czyli istnieją własności $\omega_1, \ldots, \omega_n$ takie, że elementowi a przyporządkowany jest podzbiór $\Omega \times \Omega_1 x \ldots \Omega_n$ nie zawierający elementów postaci $(\ominus, a_1, \ldots, a_n)$, gdzie $a_i \in \Omega_i$, $i = 1, \ldots, n$ (aksjomat 1). Wobec aksjomatu 2 do odniesienia elementów zbioru Ω należą elementy postaci $(\bar{a}, \ominus, \ldots, \ominus)$, dla $\bar{a} \in \Omega_o$.

Wobec powyższego istnieje element $a' \in \Omega$ taki, że przyporządkowany jest mu podzbiór $\Omega_o \times \Omega_1 x \ldots x \Omega_n$ zawierający elementy postaci $(\bar{a}, \ominus, \ldots, \ominus)$, a nie zawierający elementu $(\ominus, \ominus, \ldots, \ominus)$ (jednoznaczność odniesienia pustego). Wobec uwagi do aksjomatu 3 otrzymujemy, że a odnosi się do własności ω_o w sposób prawie jednoznaczny. Z aksjomatu 3 wynika istnienie w zbiorze Ω elementu a", mającego odniesienie do własności ω identyczne z a', zaś do wszystkich innych własności odniesienie puste. Element a" możemy utożsamić z jego odniesieniem do własności ω_o, które jest niepuste. Stąd $a'' \in \Omega_o \cap \Omega$, co przeczy niezależności własności ω i ω_o.

Dowód w drugą stronę jest oczywisty.

DEFINICJA 4: (S k o k u j a k o ś c i o w e g o). Niech $\omega_1, \ldots, \omega_n$ będą dowolnymi niezależnymi własnościami. Funkcję $\mathfrak{S}$ przekształcającą $\Omega_1 x \ldots x \Omega_n$ na Ω, gdzie ω jest pewną własnością, nazywamy skokiem jakościowym (lub krótko - skokiem) jeżeli każdy element Ω odnosi się do własności $\omega_1, \ldots, \omega_n$ oraz spełniony jest następujący warunek: jeżeli dla pewnego $a \in \Omega$ do zbioru przyporządkowanego elementowi a należy element postaci:

(*) $(a_1, \ldots, a_{i-1}, \ominus, a_{i+1}, \ldots, a_n)$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, to $X = \mathfrak{S}^{-1}(a)$ zawiera tylko elementy postaci (*).

Intuicyjny sens definicji skoku jakościowego jest następujący: często z wielu własności tworzymy jedną. Procesowi "łączenia" własności towarzyszy jakościowa przemiana (skok). Fakt ten ilustrują następujące przykłady.

PRZYKŁADY

Przykład 4. (Prędkość średnia, patrz przykład 2)

Dwie własności (droga i czas) można zastąpić jedną (prędkością). Odwzorowanie przyporządkowujące każdej parze (s, t) pewną prędkość $v \in \Omega_v$ taką, że $v = s/t$ spełnia warunki definicji 4, czyli jest skokiem. Inne pojęcia fizyczne mogą być w analogiczny sposób interpretowane jako skoki jakościowe.

Przykład 5

W bibliotekach własności takie, jak: autor książki, tytuł i rok wydania zastąpić można przez numer katalogowy. Zatem numer katalogowy można traktować jako skok jakościowy od wymienionych powyżej własności.

Przykład 6

Chorobę w medycynie można traktować jako skok jakościowy od określonego rodzaju objawów.

TWIERDZENIE 4: Jeżeli $\Omega = \mathcal{S}(\Omega_1 x \dots x \Omega_n)$, to $\mathcal{S}(\Theta, \dots, \Theta) = \{\Theta\}$.

Dowód: Zauważmy, że odniesienie puste odnosi się w sposób pusty do każdej własności ω_i, $i = 1, \dots, n$. Czyli $\mathcal{S}^{-1}(\Theta)$ zawiera elementy postaci $(a_1, \dots, a_{i-1}, \Theta, a_{i+1}, \dots, a_n)$, dla każdego $i = 1, \dots, n$. Stąd i z definicji skoku jakościowego otrzymujemy: $\mathcal{S}^{-1}(\Theta) = (\Theta, \dots, \Theta)$.

TWIERDZENIE 5: Jeżeli $\Omega = \mathcal{S}(\Omega_1 x \dots x \Omega_n)$, to własności ω i ω_i dla $i = 1, \dots, n$ są zależne.

Dowód: Przypuśćmy, że tak nie jest, czyli że istnieje $i \in \{1, \dots, n\}$ takie, że Ω i Ω_i są niezależne. Z twierdzenia 3 wynika, że każdy element $a \in \Omega$ ma odniesienie puste do własności ω_i, czyli przyporządkowany mu podzbiór $\Omega_1 x \dots x \Omega_n$ zawiera elementy postaci $(a_1, \dots, a_{i-1}, \Theta, a_{i+1}, \dots, a_n)$. Wobec definicji skoku, $\mathcal{S}^{-1}(a)$ zawiera tylko elementy postaci $(a_1, \dots, a_{i-1}, \Theta, a_{i+1}, \dots, a_n)$. Ponieważ skok jakościowy jest określony na $\Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$, jedynym elementem Ω_i jest Θ. Z tego wynika, że Ω_i nie może być przestrzenią odniesień do jakiejkolwiek własności, co kończy dowód.

TWIERDZENIE 6: Niech $\omega_o, \omega_1, \ldots, \omega_n$ będą niezależnymi własnościami, i niech $\Omega = \mathcal{S}(\Omega_1, \ldots, \Omega_n)$: ($\Omega$ - zbiór wszystkich odniesień do własności ω). Wtedy własności ω_o i ω są niezależne.

Dowód: Przypuśćmy, że tak nie jest, czyli że istnieje element $a \neq \Theta$ taki, że $a \in \Omega \cap \Omega_o$. Jeżeli tak, to a jako element przestrzeni Ω musi mieć puste odniesienie do własności $\omega_1, \ldots, \omega_n$. Wynika to z twierdzenia 3, gdyż własności $\omega_o, \omega_1, \ldots, \omega_n$ z założenia są niezależne. Wobec definicji skoku $a = \mathcal{S}(\Theta, \ldots, \Theta)$. Stosując twierdzenie 4 otrzymujemy $\mathcal{S}(\Theta, \ldots, \Theta) = \{\Theta\}$, co przeczy założeniu, że $a \neq \Theta$.

Wprowadźmy oznaczenie: $\alpha_{\omega_1}, \ldots, \omega_n(a)$ - zbiór przyporządkowany elementowi a jako odniesienie do własności $\omega_1, \ldots, \omega_n$.

TWIERDZENIE 7: (O rozkładzie na klasy abstrakcji). Jeżeli $\Omega = \mathcal{S}(\Omega_1, \ldots, \Omega_n)$, to podzbiory postaci $\alpha_{\omega_1}, \ldots, \omega_n(a)$, dla $a \in \Omega$, dzielą zbiór $\Omega_1 x \ldots x \Omega_n$ na klasy abstrakcji.

Dowód: Z definicji skoku jakościowego wynika, że istnieje element $a \in \Omega$ odnoszący się do własności $\omega_1, \ldots, \omega_n$ w sposób niepusty. Ponieważ skok jest odwzorowaniem "na", wobec aksjomatu 2 podzbiory postaci $\alpha_{\omega_1}, \ldots, \omega_n(a)$ wyczerpują zbiór $\Omega_1 x \ldots x \Omega_n$. Wobec aksjomatu 1 odniesienia postaci $\alpha_{\omega_1}, \ldots, \omega_n(a)$, dla $a \in \Omega$ są równe bądź rozłączne, czyli są klasami abstrakcji w zbiorze $\Omega_1 x \ldots x \Omega_n$.

TWIERDZENIE 8: Jeżeli $\Omega = \mathcal{S}(\Omega_1, \ldots, \Omega_n)$, $\alpha_{\omega_1}, \ldots, \omega_n(a) = \alpha_{\omega_1}, \ldots, \omega_n(\bar{a})$ i $a, \bar{a} \in \Omega$, to $a = \bar{a}$.

Dowód: Przypuśćmy przeciwnie, że istnieją a i $\bar{a}$, $a \neq \bar{a}$, $a, \bar{a} \in \Omega$ takie, że $\alpha_{\omega_1}, \ldots, \omega_n(a) = \alpha_{\omega_1}, \ldots, \omega_n(a)$. Elementy a i $\bar{a}$ muszą się różnić odniesieniem do jakiejś własności ω_o niezależnej od $\omega_1, \ldots, \omega_n$. Wobec twierdzenia 6 ω_o jest niezależna od ω. A zatem z twierdzenia 3 mamy $\alpha_{\omega_o}(a) = \Theta = \alpha_{\omega_o}(\bar{a})$, gdzie $a, \bar{a} \in \Omega$, co kończy dowód.

DEFINICJA 5: (S k o k u r e g u l a r n e g o). Niech $\Omega = \mathscr{S}(\Omega_1, \ldots, \Omega_n)$. Mówimy, że skok jest skokiem regularnym, jeżeli $\mathscr{S}^{-1}(a) = \alpha_{\omega_1}, \ldots, \omega_n(a)$.

DEFINICJA 6: Niech A będzie dowolnym zbiorem, zaś $\omega_1, \ldots, \omega_n$ dowolnymi własnościami. Mówimy, że element $a \in A$ zależy tylko od własności $\omega_1, \ldots, \omega_n$, jeżeli a odnosi się w sposób pusty do każdej własności ω niezależnej od $\omega_1, \ldots, \omega_n$.

TWIERDZENIE 9: (O istnieniu skoku regularnego). Jeżeli $\omega_1, \ldots, \omega_n$ są niezależnymi własnościami i jeżeli pewien element przestrzeni Ω (Ω - przestrzeń odniesień do własności ω) odnosi się w sposób niepusty do własności $\omega_1, \ldots, \omega_n$ oraz każdy element przestrzeni Ω zależy tylko od własności $\omega_1, \ldots, \omega_n$, to istnieje dokładnie jeden skok regularny $\mathscr{S}$ określony na $\Omega_1 x \ldots x \Omega_n$ taki, że $\Omega = \mathscr{S}(\Omega_1 x \ldots x \Omega_n)$.

Dowód: Zgodnie z twierdzeniem 3 dowolny element przestrzeni Ω odnosi się w sposób pusty do dowolnej własności ω_o niezależnej od $\omega_1, \ldots, \omega_n$. Elementy przestrzeni Ω odnoszą się w sposób niepusty tylko do własności $\omega_1, \ldots, \omega_n$. Jeżeli więc a i $\bar{a}$ są dwoma różnymi elementami Ω, to różnią się odniesieniami do własności $\omega_1, \ldots, \omega_n$. Wobec twierdzenia 7 możemy stwierdzić, że odniesienia dzielą zbiór $\Omega_1 x \ldots x \Omega_n$ na klasy abstrakcji, zaś z twierdzenia 8 wynika, że różnym elementom przyporządkowane są różne klasy. Każdej klasie przyporządkowany jest dokładnie jeden element, a każdemu elementowi dokładnie jedna klasa. Określmy funkcję $\mathscr{S}$: $\Omega_1 x \ldots x \Omega_n \rightarrow \Omega$ taką, że odniesieniu elementu $a \in \Omega$ przyporządkowujemy ten element. Funkcja ta określona jest w sposób jednoznaczny.

Udowodnimy, że jest to skok jakościowy. Wobec wcześniejszych rozważań stwierdzamy od razu, że jest to funkcja "na". Jeżeli dla pewnego elementu $a \in \Omega$, $\alpha_{\omega_1}, \ldots, \omega_n(a)$ zawiera elementy postaci

(*) $(a_1, \ldots, a_{i-1}, \Theta, a_{i+1}, \ldots, a_n)$, $i = 1, \ldots, n$, $a_i \in \Omega_i$, to wobec definicji odniesienia do $\alpha_{\omega_1}, \ldots, \omega_n(a)$ należą tylko elementy postaci (*), a więc a jest obrazem elementu postaci (*).

$\mathcal{S}$ spełnia wszystkie warunki skoku. Ponieważ dla każdego $a \in \Omega$, $\mathcal{S}^{-1}(a)$ pokrywa się z odniesieniem a, więc skok jest regularny. Jednoznaczność skoku jest oczywista.

Z twierdzenia 9 wynika, że tworzenie klas obiektów mających tylko własności $\omega_1, \ldots, \omega_n$ może być utożsamiane z podziałem iloczynu kartezjańskiego odpowiednich przestrzeni odniesień na klasy abstrakcji, czyli z wprowadzeniem w tym zbiorze relacji równoważności.

TWIERDZENIE 10: Niech ω_1, ω_2 będą niezależnymi własnościami takimi, że Ω_1 i Ω_2 mają co najmniej po trzy elementy oraz $\Omega = \mathcal{S}(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Wówczas istnieje skok $\mathcal{S}_o$ taki, że $\Omega_o = \mathcal{S}_o(\Omega_1 \times \Omega_2)$ i własności ω i ω_o są niezależne.

Dowód: Wobec twierdzenia 9, Ω można przedstawić jako obraz skoku regularnego, czyli elementy Ω można utożsamić z klasami abstrakcji zbioru $\Omega_1 \times \Omega_2$ (patrz twierdzenie 9). Możemy utworzyć Ω_o wybierając odpowiednie klasy abstrakcji różne od klas wyznaczonych przez elementy Ω. Można to zrobić w sposób następujący:

Wobec definicji skoku element Θ jest wyznaczony w sposób jednoznaczny (klasa $\{\Theta\}$ należy do obydwu przestrzeni Ω i Ω_o). Weźmy pod uwagę elementy postaci (*) (Θ, a_2), gdzie $a_2 \in \Omega_2$. Klasy zawierające elementy postaci (*) zawierają tylko takie elementy. Jeżeli elementy postaci (*) należą do jednej klasy, to dzielimy ją na dwie klasy niepuste (jest to możliwe, gdyż Ω_2 ma co najmniej trzy elementy). W przeciwnym przypadku tworzymy klasę wszystkich elementów postaci (*). Analogicznie postępujemy z elementami postaci (a_1, Θ), $a_1 \in \Omega_1$, $a_1 \neq \Theta$ oraz z elementami postaci (a_1, a_2), $a_1 \in \Omega$, $a_2 \in \Omega_2$, $a_1, a_2 \neq \Theta$.

Powstała przestrzeń Ω_o jest obrazem pewnego skoku $\mathcal{S}_o$, albowiem zachowana jest jednoznaczność odniesień pustych oraz wyczerpany iloczyn kartezjański $\Omega_1 \times \Omega_2$. Dla dowolnego elementu $a \in \Omega_o$, $a \neq \Theta$ nie istnieje w Ω element $\bar{a}$ mający identyczne odniesienie do $\Omega_1 \times \Omega_2$, jak a, czyli $a \neq \bar{a}$ dla każdego $a \in \Omega$ i $\bar{a} \in \Omega_o$. Mamy więc $\Omega_o \cap \Omega = \{\Theta\}$, co dowodzi niezależności ω i ω_o.

DEFINICJA 7: (P r z e s t r z e ń s k o k ó w). Przestrzenią skoków $P\mathcal{S}(\omega_1, \ldots, \omega_n)$ rozpiętą na niezależnych własnościach $\omega_1, \ldots, \omega_n$ nazywamy klasę wszystkich elementów $a \in \Omega$, gdzie

Ω jest obrazem skoku określonego na $\Omega_{k_1}, \ldots, \Omega_{k_i}$, a $\omega_{k_1}, \ldots, \omega_{k_i}$ jest pewnym podzbiorem $\omega_1, \ldots, \omega_n$.

DEFINICJA 8: (J a k o ś c i). Dowolny element przestrzeni skoków będziemy nazywać jakością.

Przestrzeń skoków została zdefiniowana jako określenie dziedziny rozważań. Pełni ona w teorii jakości analogiczną rolę jak przestrzeń topologiczna w topologii. W większości praktycznych zastosowań teorii jakości nie potrzebujemy tak obszernej dziedziny rozważań jaką jest przestrzeń skoków. Wystarczy nam ograniczyć się do pewnych jej podzbiorów. Przestrzeń skoków należy jednak traktować jako uniwersum, poza które nie wykraczamy.

PRZYKŁADY

Przykład 7

Pojęcie przestrzeni skoków wykorzystaliśmy w psychologii do skonstruowania modelu otwartości w stosunkach międzyludzkich. Służyło nam ono do scharakteryzowania pola informacyjnego (pola zainteresowań) człowieka. Informację interpretowaliśmy jako jakość, czyli element przestrzeni skoków, rozpiętej na pewnym skończonym zbiorze własności, które konkretny człowiek uważa za ważne. W dużym uproszczeniu dla osoby zatrudnionej w informacji kolejowej pole informacyjne - pole zainteresowań - możemy utożsamić z przestrzenią skoków rozpiętą na własnościach takich, jak: godzina przyjazdu i odjazdu pociągu, trasa i skład pociągu.

TWIERDZENIE 11. Klasa obiektów zależnych tylko od $\omega_1, \ldots, \omega_n$ pokrywa się z $P\mathfrak{S}(\omega_1, \ldots, \omega_n)$.

Dowód: Weźmy dowolny element $a \in P\mathfrak{S}(\omega_1, \ldots, \omega_n)$. Wówczas istnieje przestrzeń Ω_o i skok $\mathfrak{S}$ taki, że $\Omega_o = \mathfrak{S}(\Omega_{k_1}, \ldots, \Omega_{k_n})$, gdzie $\omega_{k_1}, \ldots, \omega_{k_n}$ zawiera się w $\omega_1, \ldots, \omega_n$ i $a \in \Omega_o$. Na mocy twierdzenia 6 a odnosi się w sposób pusty do każdej własności ω niezależnej od $\omega_1, \ldots, \omega_n$. Dowód przeciwnej inkluzji jest oczywisty.

Uniwersytet Łódzki
Katedra Logiki i Metodologii Nauk

Instytut Filozofii i Socjologii PAN
Zakład Logiki

Piotr Rydzewski, Tomasz Zabolski

THEORY OF QUALITY

There could be accepted an ontological model, in which every thing is identified with properties possessed by it.

This study is an attempt at matematization of the concept of property. Axiomatization was conducted so that this concept could be compatible, to a maximum degree, with institutional understanding.

The main result is assertion 11 due to its methodological consequences. A collection of all objects discernible with regard to the finite number of independent properties was called "space of jumps" (formal definitions of "independence" and "space of jumps" are given in the article). "Space of jumps" may be treated as a certain model of "possible world". The assertions contained in the article give its characterization. By way of simplifying, the assertion 11 can be expressed as follows: accepting that a man´s cognition takes place through a finite number of senses, which recognize basic and independent properties, it can be stated that a man cannot recognize objects possessing properties independent of properties recognizable through senses.