A C T A   U N I V E R S I T A T I S   L O D Z I E N S I S
FOLIA PHILOSOPHICA 5, 1988
https://doi.org/10.18778/0208-6107.05.02

Maciej Godycki-Ćwirko

ROZWAŻANIA WOKÓŁ WARTOŚCI LOGICZNYCH

Większość logików obcuje w sposób bardziej lub mniej bezpośredni z pojęciem wartości logicznej. Niewielu jednak formułuje explicite definicję tego pojęcia. Nie mam zamiaru w tym miejscu podawać takiej definicji, chciałbym tylko zwrócić uwagę na punkt wyjścia czy raczej punkt odniesienia, który nasuwa się podczas lektury prac związanych z problemem wartości logicznych.

Przedmiotem rozważań będzie stanowisko, w którym przyjmuje się że wartość logiczna zdania p jest tożsama, a przynajmniej wiąże się z odpowiedzią na pytanie domagające się rozstrzygnięcia: "Czy prawdą jest, że p?", przy pewnym rozumieniu prawdziwości.

Ze sformułowanym wyżej stanowiskiem wiążą się problemy, które były podnoszone i w różny sposób rozwiązywane przez rozmaitych autorów. W dalszym ciągu sformułuję te problemy i pokrótce zreferuję w jaki sposób pojawiały się w pracach logicznych.

1. CZY ZAWSZE MOŻNA SFORMUŁOWAĆ PYTANIE?

Od najdawniejszych czasów wiązano pojęcie sądu, zdania czy też logicznej treści zdania z prawdziwością i fałszywością. Pojawia się to u Arystotelesa czy dzięki świadectwu Sekstusa Empiryka u stoików, podobnie jest w średniowieczu. Aż wreszcie tak ujmuje to Frege czy jeszcze bardziej współcześni autorzy, jak np. Jan Łukasiewicz.

Sekstus Empiryk w księdze II traktatu "Przeciw logikom", omawiając poglądy stoików, pisze: "Sądem jest to, co jest prawdziwe albo fałszywe"[1].

---

[1] S e k s t u s   E m p i r y k, Przeciw logikom, Warszawa 1970.

Piotr Hiszpan w "Traktacie logicznym" z połowy XIII w. pisze: "Zdanie jest to wypowiedź oznaczająca prawdę i fałsz w procesie sądzenia"[2].

Frege w "Sensie i znaczeniu" stwierdza: "Przez wartość logiczną zdania rozumiem okoliczności, że jest ono prawdziwe lub, że jest fałszywe. Innych wartości logicznych nie ma"[3].

Również dla Łukasiewicza punktem wyjścia jest prawdziwość i fałszywość sądów. W roku 1907 pisze: "Zadaniem logiki jest natomiast stwierdzać obiektywne prawa związków między prawdziwością i fałszywością sądów"[4].

Wybrane przykłady wskazują, iż sposób rozumienia pojęcia zdania (zdania w sensie logicznym) wiąże się z możliwością zadania pytania o jego prawdziwość. Odrębną kwestią jest istnienie i rodzaj odpowiedzi, a ta sprawa zostanie poruszona w dalszym ciągu.

2. CZY ZAWSZE ISTNIEJE ODPOWIEDŹ?

Tutaj nie ma zgody. Omawiani autorzy przyjmują dwa sprzeczne stanowiska.

1. TAK. Takie stanowisko autorzy wiążą z rozumieniem pojęcia zdania, a mianowicie przyjmują, że tylko takie wyrażenia należy uznać za zdania, dla których będzie istniała odpowiedź na pytanie domagające się rozstrzygnięcia o ich prawdziwość. Będzie to wersja logiczna tego stanowiska.

Przykładem może być przytoczona wyżej wypowiedź Piotra Hiszpana czy też choćby stanowisko Kazimierza Ajdukiewicza.

Ajdukiewicz w "Logice pragmatycznej" pisze: "Prawdę i fałsz nazywamy wartościami logicznymi [...] cechą charakterystyczną zdań oznajmujących, czyli zdań w sensie logicznym jest to, że mają one jakąś wartość logiczną"[5].

Według wersji filozoficznej omawiane stanowisko wiąże się z samą strukturą świata, a można je spotkać w poglądach stoików albo arystotelików średniowiecznych.

---

[2] P i o t r H i s z p a n, Traktaty logiczne, Warszawa 1969, T. I, s. 6.

[3] G. F r e g e, Sens i znaczenie (1892), [w:] i d e m, Pisma semantyczne, Warszawa 1977, s. 70.

[4] J. Ł u k a s i e w i c z, Logika a psychologia (1907), [w:] i d e m, Z zagadnień logiki i filozofii, Pisma wybrane, Warszawa 1961.

[5] K. A j d u k i e w i c z, Logika pragmatyczna, Warszawa 1975, s. 29.

Stanowisko takie, w obu wersjach, prowadzi do dwuwartościowej logiki "sic et non".

2. NIE. To stanowisko, pojawiające się już w szkole epikurejskiej i u Arystotelesa, ma współcześnie - jak się wydaje - przynajmniej trzy wersje. Pierwsza to pójście w kierunku wielowartościowości - reprezentują ją w swoich pracach pionierzy na tym polu: H. Mac Coll, C. S. Peirce, N. A. Wasiliew, a potem J. Łukasiewicz, D. A. Boĉvar, S. C. Kleene czy H. Greniewski. Druga, zapoczątkowana przez B. Russell'a, obecna w pracach m. in. M. Blacka oraz B. Rolfa, to pójście w kierunku nieostrości i rozmytości. Trzecia wreszcie to punkt widzenia intuicjonistów.

Łukasiewicz przywołuje podany przez Arystotelesa przykład wypowiedzi dotyczącej mającej się rozegrać "następnego" dnia bitwy morskiej. Ponieważ w danym momencie - "dzisiaj" nie da się stwierdzić czy zdanie orzekające o wygranej jednej ze stron jest prawdziwe, czy fałszywe zdanie to należy bądź wykluczyć z pola zainteresowań logiki dwuwartościowej, bądź przyporządkować mu dodatkową - trzecią wartość logiczną. Tą ostatnią drogą idzie Łukasiewicz. Po zdefiniowaniu spójników i wyróżnieniu wartości 1 otrzymuje matrycę logiki $Ł_3$. Prostym uogólnieniem jest zwiększenie ilości wartości logicznych w szczególności do nieskończenie - (przeliczalnie bądź nieprzeliczalnie) - wielu[6].

Greniewski formułuje zasadę dwuwartościowości, ujmując ją w dwóch punktach: (i) Każde zdanie (języka L) jest prawdziwe lub fałszywe, (ii) Żadne zdanie prawdziwe nie jest fałszywe. Wychodzi następnie poza tę zasadę i konstruuje logikę 2^{n+1}-wartościową, umożliwiającą rozważanie zdań, którym w danym momencie nie możemy przypisać prawdziwości czy fałszywości, lecz którym będziemy mogli je przypisać w jakimś określonym momencie w przyszłości. Aby to uczynić czas dzielimy na skończone rozłączne odcinki i przypisujemy różne wartości logiczne klasom abstrakcji odpowiednich koniunkcji i alternatyw zdań opisujących daną sytuację w określonym momencie[7].

Zbliżony do Greniewskiego pogląd reprezentuje R. Suszko, który uważa, że ekstensjonalny podział zdań na prawdziwe i fałszywe

---

[6] J. Łukasiewicz, O logice trójwartościowej, "Ruch Filozoficzny" 1920, vol. V, s. 170-171.

[7] H. Greniewski, 2^{n+1} wartości logicznych, cz. I w: "Studia Filozoficzne" 1957, nr 2, s. 82-117; cz. II w: "Studia Filozoficzne" 1957, nr 3, s. 3-28.

jest przez logikę formalną zastany w języku naturalnym. Przyjęcie go nie wyklucza jednak innych podziałów, które mogą być nań nakładane[8].

W innym kierunku idą rozważania Russella, Blacka oraz Rolfa. Russell jako pierwszy porusza problem nieostrości (vagueness) przeciwstawionej ścisłości (precision). W języku dane słowo lub zdanie jest nieostre, gdy jego znaczenie (denotacja) jest typu 1-wiele, tzn. istnieje więcej niż jeden przedmiot który dane słowo denotuje, oraz więcej niż jedna sytuacja, która opisywana jest danym zdaniem. Kryterium nieostrości słowa (a w konsekwencji zdania) jest istnienie przypadku granicznego (borderline case), tzn. przypadku, w którym zastosowanie danego słowa jest wątpliwe. Według Russell'a każdy język, a w szczególności język logiki klasycznej, jest nieostry i w związku z tym niewłaściwie przedstawia (misdescribes) świat fizyczny[9].

Black próbuje stworzyć logikę, która jest zrelatywizowana do nieostrości symboli, przy czym zwykła logika ma być jej aproksymacją. Jego punktem wyjścia są rozważania Russell'a i C. S. Peirce'a. Peirce mówi: "Zdanie jest nieostre, jeśli istnieją możliwe stany rzeczy, odnośnie [do] których jest wewnętrznie [intrinsically] niepewne, czy gdyby były one rozpatrywane przez mówiącego, uważałby je on za odrzucone, czy dopuszczone przez to zdanie. Przez wewnętrzną niepewność rozumiemy nie niepewność będącą konsekwencją niewiedzy mówiącego, ale to, że językowe nawyki mówiącego są niezdeterminowane, tak, że jednego dnia może on uważać zdanie za odrzucające, a drugiego za dopuszczające te stany rzeczy"[10]. Black przyjmuje, że gdy termin jest nieostry pojawiają się zmiany w jego zastosowaniu. Zmiany te są systematyczne (systematic), czyli nieostrość byłaby obiektywną cechą świata mierzoną przez zmiany istniejące pomiędzy mówiącymi, przejawiające się w stosowaniu pewnych terminów[11].

Dla Rolfa zdanie, w szczególności, będzie nieostre wtedy i tylko wtedy, gdy nie jest ani prawdziwe, ani fałszywe[12].

[8] R. S u s z k o, Formalna teoria wartości logicznych, "Studia Logica" 1957, t. VI.

[9] B. R u s s e l l, Vagueness, "Australasian Journal of Philosophy and Psychology" 1923, vol. 1.

[10] C. S. P e i r c e, Vague, [w:] Dictionary of Philosophy and Psychology, ed. J. M. B a l d w i n, Macmillan, London-New York 1902.

[11] M. B l a c k, Vagueness: an Exercise in Logical Analysis "Philosophy of Sciense" 1937, nr 4.

[12] B. R o l f, Topics on Vagueness, Studentlitteratur, Lund 1981.

Trzeci z kolei kierunek to intuicjonizm. Dla intuicjonistów "logika jest zbiorem reguł uzasadniania usprawiedliwionych naukowo, jest metodą rozwiązywania problemów, przeprowadzania badań myślowych"[13]. W związku z powyższym nie dla wszystkich sensownych zdań istnieje odpowiedź na pytanie o ich prawdziwość. Odpowiedź taka istniała będzie jedynie dla tych zdań, dla których sposób uzasadnienia spełni określone wymogi (np. efektywność dowodu, konstruowalność). Pozostałe zdania są według intuicjonistów pozbawione prawdziwości i fałszywości.

3. CZY I JAK SPÓJNIKI WPŁYWAJĄ NA ODPOWIEDŹ W PRZYPADKU ZDAŃ ZŁOŻONYCH?

Oczywiste jest, że sposób zdefiniowania spójnika wpływa zarówno na rozumienie, jak i na wartość logiczną zdania złożonego, zawierającego ten spójnik. Odnośnie do pierwszej kwestii przytoczymy opinię A. Zinowiewa, który tak pisze o negacji w logice dwuwartościowej: "W ramach logiki dwuwartościowej ma miejsce dwojakie pojmowanie dwuwartościowości i negacji: 1) Negację pojmuje się jako nieokreśloną, to jest Nx oznacza: nie jest tak jak się orzeka w x; prawo wyłącznego środka ma postać: albo zdanie x przyjmuje wartość logiczną i ($x = i$), albo nie przyjmuje ($x \neq i$), $i \in \{1, 0\}$. 2) Negację pojmuje się jako określoną(negacja stwierdza jeden z dwóch ściśle określonych stanów); prawo wyłączonego środka przyjmuje postać: albo $x = 0$, albo $x = 1$"[14]. Co do wpływu na wartość logiczną szczególnie widać go w przypadku, gdy rozpatruje się logikę o większej niż dwie ilości wartości logicznych. Wystarczy choćby przypomnieć definicję implikacji Łukasiewicza[15], Bočvara[16], czy Kleene'a[17] dla logiki trójwartościowej. W takim

---

[13] A. G r z e g o r c z y k, Nieklasyczne rachunki zdań a metodologiczne schematy badania naukowego: definicje pojęć asertywnych, "Studia Logica" 1967, t. XX.

[14] A. Z i n o w i e w, Filozoficzne problemy logiki wielowartościowej, Warszawa 1963.

[15] Ł u k a s i e w i c z, O logice trójwartościowej...

[16] D. A. B o č v a r, Od odnom trehznačnom isčislenii i ego primenenii k analizu paradoksov klassičeskogo rasširennogo funkcionalnogo isčislenija, "Matematičeskij sbornik" 1939, s. 287-308.

[17] S. C. K l e e n e, Introduction to Matemathematics, Princeton, Amsterdam 1952, s. 332-340.

przypadku widać wyraźnie problematyczność intuicji związanych z danym spójnikiem. Skoro jednak sposób formalnego określenia pewnych spójników budzi wątpliwości bądźmy konsekwentni i rozszerzmy je na wszystkie spójniki, w szczególności na negację. Przyjmijmy więc, że zdaniom prostym możemy przypisywać dokładnie jedną wartość logiczną 1, którą interpretować będziemy jako prawdę. Rozważmy kwestię spójników. Łatwo zauważyć, że jeśli ograniczymy się do podanej konstrukcji, uzyskamy tylko jeden ekstensjonalny spójnik jednoargumentowy asercję (= verum), natomiast spójniki o większej liczbie argumentów wygenerują jedynie prawdziwe zdania złożone. Otrzymaliśmy konstrukcję, którą możemy nazwać systemem pierwotnym, spróbujmy go rozbudować tak, aby nadbudowany system zawierał potoczne intuicje. Dopuśćmy więc swoistą intencjonalność spójników jednoargumentowych. Będzie ona polegała na tym, że zdanie złożone zbudowane za pomocą takiego spójnika będzie mogło mieć wartość logiczną "odbiegającą" od wyjściowej prawdziwości. Rozważmy chwilowo jeden spójnik. Niech spójnik N zmienia wartość logiczną zdania p i przypisuje mu wartość O. Spójnik ten możemy zinterpretować jako negację, a wartość przypisywaną przez niego zdaniom jako fałsz. Możemy teraz przejść do systemu "wtórnego" przyjmując jako dopuszczalne dwie wartości logiczne 1 oraz N1 = O. Dalej wprowadzamy spójniki standardowo, opierając się na metodzie tabelkowej, definiujemy wtórną negację, koniunkcję, alternatywę, implikację i równoważność otrzymując klasyczną logikę dwuwartościową.

Oprócz negacji, w systemie pierwotnym wprowadzać możemy inne spójniki jednoargumentowe, dowolnie zwiększając liczbę wartości logicznych systemu wtórnego. W przypadku wprowadzenia trzeciego (po asercji i negacji) spójnika, np. przyporządkowującego zdaniu wartość 1/2, możemy go zinterpretować jako możliwość, tak samo określając wartość logiczną przypisywaną przez niego zdaniom. Zauważmy, iż po przejściu do trójwartościowego systemu wtórnego pojawi się możliwość różnorakiego definiowania spójników, jak to miało miejsce w systemach Łukasiewicza, Boĉvara czy Kleene´a.

Zauważmy ponadto, iż wtórną logikę dwuwartościową potraktować możemy jako wyjściową do konstrukcji systemu, gdzie wprowadzenie dodatkowego spójnika jednoargumentowego zamieniającego O i 1 w jakieś dwie dodatkowe wartości logiczne A, B pozwoli nam przejść do 4-wartościowego systemu "nad-wtórnego". Wielokrotne powtórzenie tego postępowania doprowadzi nas do systemu 2^n-wartościowego, wykazującego pewne podobieństwa do konstrukcji Greniewskiego[18].

Zupełnie analogicznie można budować systemy 3^n-, 4^n-, ..., k^n-wartościowe.

Poczyńmy jeszcze w tym punkcie spostrzeżenia, że ilość spójników przy ustalonej liczbie argumentów i ustalonej liczbie wartości logicznych (ustalonym rzędzie matrycy rozważanej logiki) jest skończona i możliwa do obliczenia przy użyciu metod kombinatorycznych. Poczynione spostrzeżenia pochodzą od J. Łosia, który zauważył, że w systemie logicznym S, którego rząd wynosi n, liczba różnych funktorów od jednego argumentu, które można zdefiniować, wynosi n^n. W szczególności, jeżeli w systemie S daje się zdefiniować więcej niż cztery istotnie różne funktory od jednego argumentu, to rząd tego systemu jest większy od dwóch[19].

4. CZY ISTNIEJE TYLKO JEDNA ODPOWIEDŹ?

Ponownie możliwe są tutaj dwa stanowiska.

1. TAK. Tradycyjnie uważa się, że danemu zdaniu można przypisać tylko jedną wartość logiczną. Zdanie, choćby w "ostatniej instancji", ma dokładnie jedną wartość logiczną. Może być prawdziwe bądź fałszywe - jak to ma miejsce w logice klasycznej - lub może przyjmować jakąś inną, dodatkową wartość - jak np. w logice Łukasiewicza. Nazwijmy takie stanowisko logiką jednostkową.

2. NIE. To stanowisko ma przynajmniej dwie wersje. Jedną będzie teoria superwaluacji, która pojawia się w pracach B. C. van Fraassen'a, drugą pochodząca od Posta logika grupowa.

Van Fraassen zaczyna od założenia, że w dowolnej sytuacji pewne zdania są prawdziwe, a inne fałszywe. Jeśli L jest językiem, w którym te zdania się pojawiają, to powiemy, że przyjęte wartościowanie w L odzwierciedla tę sytuację, jeśli przypisuje ono T do zdań prawdziwych w tej sytuacji i F do zdań fałszywych w tej sytuacji. W ogólności wiele wartościowań przyjętych dla L może odzwierciedlać tę samą sytuację i są one poprawne odnośnie do sytuacji przynajmniej w tym zakresie, w jakim są zgodne z ustalenia-

---

18 G r e n i e w s k i, op. cit.

19 J. Ł o ś, Logiki wielowartościowe a formalizacja funkcji intensjonalnych, "Kwartalnik Filozoficzny" 1948, vol. 17, s. 59-78.

niami prawdy i fałszu. Dlatego jeśli v i v' odzwierciedlają daną sytuację i v(A) ≠ v'(A) to A nie jest ani prawdziwe, ani fałszywe w tej sytuacji, przy każdym użyciu słowa "odzwierciedla". Powiemy, że wartościowanie s jest superwaluacją dla języka L wtw istnieje niepusty zbiór K dopuszczalnych waluacji dla L takich że dla wszystkich zdań A z L:

s(A) = T wtw v(A) = T dla każdego v ∈ K,

s(A) = F wtw v(A) = F dla każdego v ∈ K,

s(A) jest niezdefiniowane w pozostałych przypadkach[20].

Jak widać teoria superwaluacji dopuszcza wielokrotne wartościowanie tego samego zdania, lecz wielość zawsze redukowana jest do jednej wartości lub braku wartości (value gap). Poniżej spróbujemy nie dokonywać takiej redukcji i rozważać zdania z odpowiadającymi im ciągami wartości.

Propozycja takiego opisu pochodzi od E. Posta[21]. Proponuje on logikę opartą na macierzy, dla której zbiorem wyjściowym jest zbiór ciągów postaci

$$w_0 = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{I_1(w_0)}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{I_0(w_0)}),$$

gdzie $0 \leqslant I_1(w_0) \leqslant n$, $I_1(w) + I_0(w_0) = n$; spójniki są odpowiednio zdefiniowane, a zbiór wartości wyróżnionych może składać się chociażby z ciągu $\underbrace{(1, \ldots, 1)}_{n}$. Macierz ta zawiera wyłącznie negację i alternatywę, dalsze spójniki można wprowadzać standardowo. Łatwo zauważyć, że gdy $n > 1$, możliwe są różne sposoby definiowania spójników, które są intuicyjnymi rozszerzeniami definicji spójników w jednostkowej logice klasycznej. Przykładowo Post dwojako definiuje negację. Negacja wyrażenia $w = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{I_1(w)}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{I_0(w)})$ może być zdefiniowana jak następuje:

$$w = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{I_0(w)}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{I_1(w)}),$$

albo

$$w = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{I_1(w)+1}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{I_0(w)-1}),$$

---

[20] B. C. v a n F r a a s s e n, Formal Semantics and Logic Macmillan, New York 1973.

[21] E. P o s t, Introduction to a General Theory of Elementary Propositions, "American Journal of Mathematics" 1921, nr 43, s. 163-185.

gdzie dodawanie i odejmowanie są działaniami modulo n. Alternatywę natomiast dwóch wyrażeń

$$w_1 = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{I_1(w_1)}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{I_0(w_0)}) \quad \text{i} \quad w_2 = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{I_1(w_2)}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{I_0(w_2)})$$

można zdefiniować następująco:

$$w_1 \vee w_2 = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{\max\,[I_1(w_1),\, I_1(w_2)]}, 0, \ldots, 0).$$

Przy powyższym opisie element zbioru wyjściowego macierzy - n-elementowy ciąg 1 i 0 - można zinterpretować, jako dwuwartościowo ocenioną wypowiedź grupy składającej się z n-osobników.

Gdy grupa składa się z jednego osobnika, tzn. gdy w powyższej matrycy ciągi są jednoelementowe, to przy każdej z podanych definicji spójników otrzymamy klasyczną logikę zdań. Kiedy natomiast na dowolnym miejscu ciągu dopuścimy oprócz zer i jedynek inne wartości, otrzymamy grupowe logiki wielowartościowe.

Zauważmy na koniec krótko, że jeśli w systemie grupowym pominiemy założenie o grupowaniu jednakowych wartości koło siebie oraz wprowadzimy porządek - będziemy rozpatrywali n-tki uporządkowane - otrzymamy nic innego, jak produkt logik jednostkowych. Idea takiego ujęcia pojawia się w pracach A. N. Priora[22], A. Rose´a[23] oraz N. Reschera[24].

Uniwersytet Łódzki
Katedra Logiki i Metodologii Nauk

Maciej Godycki-Ćwirko

DELIBERATIONS UPON LOGICAL VALUES

The author formulates in this article a point of view, which is prompted by works dealing with the problem of logical values. There is analyzed a view that logical value of the sentence p is identical or at least connected with

[22] A. N. P r i o r, Time and Modality, Oxford 1952.

[23] A. R o s e, Eight Valued Geometry, "Proceedings of the London Mathematical Society" 1952, ser. 3, nr 2, s. 30-44.

[24] N. R e s c h e r, Topics in Philosophical Logic, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht [Holland] 1968.

an answer to a question making it necessary to determine: "Is it true that p?" The analysis is also focussed on four questions-problems:

1. Can a question be always formulated?
2. Does an answer always exist?
3. Do conjunctions influence an answer in the case of compound sentences, and how?
4. Does only one answer exist?