A C T A U N I V E R S I T A T I S L O D Z I E N S I S
FOLIA PHILOSOPHICA 5, 1988

https://doi.org/10.18778/0208-6107.05.01

Marek Nowak

O MOŻLIWOŚCI INTERPRETOWANIA TRÓJWARTOŚCIOWEJ LOGIKI ŁUKASIEWICZA METODĄ J. SŁUPECKIEGO

WSTĘP

W pracy J. Słupeckiego "Próba intuicyjnej interpretacji logiki trójwartościowej Łukasiewicza"[1] przedstawiona została pewna metoda interpretowania trójwartościowej logiki Łukasiewicza $\mathcal{L}_3$ oparta na prostych i intuicyjnych założeniach. Składają się na nią dwa rodzaje postępowania. Pierwszy rodzaj ma na celu uzyskanie częściowej interpretacji $\mathcal{L}_3$, tzn. wskazanie konkretnego języka, dla którego istnieje wartościowanie w matrycę $(Ł_0, \{1\})$, gdzie $Ł_0 = (\{1, 1/2, 0\} \vee, \wedge, -)$ jest trójelementową kratą De Morgana z jedynką[2]. Rezultatem postępowania drugiego rodzaju ma być uzupełnienie częściowej interpretacji do interpretacji pełnej.

Celem niniejszej pracy jest krytyczne ustosunkowanie się do możliwości interpretowania logiki Łukasiewicza metodą Słupeckiego. W części 1 podajemy formalną konstrukcję, na której oparta jest metoda częściowej interpretacji $\mathcal{L}_3$. Część 2 zawiera wyjściowe założenia, na gruncie których prof. Słupecki uzyskuje interpretację częściową. W części 3 wykazujemy, że sposób uzyskania tej interpretacji oparty jest rzeczywiście na konstrukcji z części 1. Na koniec w części 4 ustosunkowujemy się do omówionej interpretacji $\mathcal{L}_3$. Wykazujemy, iż interpretacja ta nie może być uzyskana stosowaną metodą.

---

[1] J. S ł u p e c k i, Próba intuicyjnej interpretacji logiki trójwartościowej Łukasiewicza, [w:] i d e m, Rozprawy logiczne, Warszawa 1964.

[2] H. R a s i o w a, An Algebraic Approach to Non-Classical Logics, Warszawa 1974, s. 44-48.

1. FORMALNA STRUKTURA METODY CZĘŚCIOWEJ INTERPRETACJI TRÓJWARTOŚCIOWEJ LOGIKI ŁUKASIEWICZA

Przez "interpretację $\mathcal{L}_3$" Słupecki rozumie podanie pewnego konkretnego języka wartościowanego w trójelementową matrycę Łukasiewicza. Przez "konkretny język" rozumie się algebrę absolutnie wolną $\underline{S}$ podobną do algebry Łukasiewicza $\underline{Ł}_3 = (\{1, 1/2, 0\} \vee, \wedge, \rightarrow, \neg)$ taką, że elementy zbioru S są schematami zdaniowymi dla pewnego fragmentu języka naturalnego. Zatem metoda Słupeckiego ma umożliwić znalezienie takiego fragmentu języka naturalnego, że jego zbiór schematów zdaniowych tworzy algebrę $\underline{S}$, dla której istnieją homomorfizmy $h : \underline{S} \rightarrow \underline{Ł}_3$. Metoda częściowej interpretacji $\mathcal{L}_3$ ma na celu wskazanie takiego fragmentu języka naturalnego, że jego zbiór schematów zdaniowych tworzy algebrę $\underline{S}$, dla której istnieje homomorfizm $h : \underline{S} \rightarrow \underline{Ł}_o$.

Metoda uzyskania częściowej interpretacji $\mathcal{L}_3$ J. Słupeckiego oparta jest na następującej konstrukcji:

(1) Bierzemy pod uwagę algebrę $\underline{Z} = (Z, \vee, \wedge, ')$ typu (2, 2, 1), gdzie Z jest niepustym zbiorem pewnych obiektów, taką, że

(i) określony jest trójelementowy podział zbioru Z: $p(Z) = \{Z_1, Z_{1/2}, Z_o\}$,

(ii) relacja równoważności Θ odpowiadająca podziałowi p(Z) jest kongruencją algebry $\underline{Z}$,

(iii) algebra ilorazowa $\underline{Z}/\Theta$ jest kratą De Morgana z jedynką.

(2) Bierzemy algebrę $\underline{S}$ absolutnie wolną, podobną do algebry $\underline{Z}$, taką, dla której istnieje homomorfizm $\psi: \underline{S} \rightarrow \underline{Z}$.

Ponieważ algebra $\underline{Z}/\Theta$ jest trójelementową kratą De Morgana z jedynką, więc $\underline{Z}/\Theta$ jest izomorficzna z algebrą $\underline{Ł}_o$ (bo z dokładnością do izomorfizmu istnieje tylko jedna trójelementowa krata De Morgana z jedynką). $\underline{Ł}_o$ jest "fragmentem" trójelementowej algebry Łukasiewicza. Zatem superpozycja $I \cdot h_o \cdot \psi : \underline{S} \rightarrow \underline{Ł}_o$, gdzie $h_o: \underline{Z} \rightarrow \underline{Z}/\Theta$ jest naturalnym homomorfizmem algebry $\underline{Z}$ na algebrę ilorazową $\underline{Z}/\Theta$, zaś $I: \underline{Z}/\Theta \rightarrow \underline{Ł}_o$ jest izomorfizmem, jest - jako złożenie trzech homomorfizmów - wartościowaniem algebry $\underline{S}$ w matrycę $(\underline{Ł}_o, \{1\})$.

Otóż teraz wystarcza wskazać konkretny zbiór obiektów Z, taki który tworzy odpowiednią algebrę spełniającą warunki (i)-(iii), aby otrzymać interpretację częściową $\mathcal{L}_3$. Mianowicie ową interpretację będzie stanowił zbiór S schematów dla zdań z języka naturalnego opisujących w pewien określony sposób obiekty ze zbioru Z (czy też zdań o obiektach ze zbioru Z) i wszystko jedno w jaki sposób opisujących te obiekty, byle tylko spełniony był warunek (2), a to zawsze można założyć.

2. ZAŁOŻENIA SŁUPECKIEGO DLA CZĘŚCIOWEJ INTERPRETACJI $\mathscr{E}_3$

Przedstawiona w punktach (1) i (2) konstrukcja nie jest podana explicite w cytowanej wyżej pracy[3]. Stwierdzenie, że metoda częściowej interpretacji $\mathscr{E}_3$ Słupeckiego jest rzeczywiście oparta na tej konstrukcji, wymaga dowodu. W tym celu przedstawimy w streszczeniu sposób postępowania podany w owej pracy.

1. J. Słupecki rozpatruje pewien zbiór obiektów, które nazywa zdarzeniami oraz język będący sumą teoriomnogościową dwóch zbiorów: zbioru tzw. zdań o zdarzeniach (opisujących zdarzenia) i zbioru zdań nie opisujących zdarzeń. Wydaje się, iż intencją Słupeckiego jest, aby obiekty rozpatrywanego zbioru były takimi zdarzeniami jakie rozważa rachunek prawdopodobieństwa. Zatem przyjmuje on "za matematykami i na odpowiedzialność matematyków", że zbiór owych obiektów stanowi algebrę Boole'a: $\underline{Z} = (Z, \vee, \wedge, ')$.

2. W zbiorze zdarzeń Z określona jest pewna binarna relacja $\mapsto$ zwana relacją przyczynowości (symbol $f \mapsto f_1$ czytamy: zdarzenie f jest przyczyną zdarzenia f_1). Słupecki jej nie definiuje wprost, lecz podaje następujące cztery własności, które ma spełniać:

(P1) $f \mapsto f_1 \vee f_2$ wtw $f \mapsto f_1$ lub $f \mapsto f_2$;

(P2) $f \mapsto f_1 \wedge f_2$ wtw $f \mapsto f_1$ i $f \mapsto f_2$;

(P3) jeżeli $\exists f \in Z: f \mapsto f_1$, to $\sim \exists f \in Z : f \mapsto f_1'$;

(P4) jeżeli $f_1 \mapsto f$, to $f_1 \wedge f_2 \mapsto f$

dla dowolnych $f, f_1, f_2 \in Z$.

3. W zbiorze zdarzeń wyróżniony jest zbiór zdarzeń przeszłych i z chwili obecnej oznaczanych symbolami: $g, g_1, g_2, \ldots$ Na podstawie relacji $\mapsto$ Słupecki definiuje następujące wyrażenia:

[3] S ł u p e c k i, op. cit.

(1) $D(f) \overset{df}{\equiv} \exists g \in Z: g \mapsto f$

$\bar{D}(f) \overset{df}{\equiv} \sim D(f)$ i $\sim D(f')$

Czytamy:

$D(f)$ - zdarzenie f jest w chwili obecnej zdeterminowane,

$\bar{D}(f)$ - zdarzenie f jest w chwili obecnej niezdeterminowane.

Jak się wydaje założenie 3 w pierwszej swojej części jest w koncepcji Słupeckiego zbędne, pod warunkiem, że relację $\mapsto$ rozumie się jako relację przyczynowości, gdzie wyrażenie "przyczynowość" rozumie się w znaczeniu potocznym, co najwyżej zmodyfikowanym przez warunki (P1)-(P4). Jak się wydaje na podstawie analizy tekstu pracy, mimo braku zdefiniowania relacji $\mapsto$, w ten właśnie sposób Słupecki ją pojmuje. Potoczne znaczenie "przyczynowości" wyznacza oczywiste dla każdego relacje czasowe między zdarzeniami. Mianowicie, jeśli prawdziwe jest zdanie: "zdarzenie f jest przyczyną zdarzenia f_1" (gdzie "przyczynę" rozumiemy potocznie), to z pewnością zdarzenie f jest wcześniejsze lub z chwili współczesnej zdarzeniu f_1 ("chwila" jest tu rozumiana również potocznie - zgodnie z intencją Słupeckiego). Wystarcza spojrzeć na warunki (P1)-(P4), aby stwierdzić, że zmiany w potocznym znaczeniu wyrażenia "przyczynowość", jakie być może niosą one ze sobą, nie dotyczą tego rodzaju czasowych relacji między zdarzeniami. Zatem wyrażenie: "$f \mapsto f_1$" zawiera już tę informację, iż zdarzenie f jest wcześniejsze lub współczesne zdarzeniu f_1.

W dalszym ciągu posługując się definicjami (1) o zdarzeniu oznaczonym symbolem g nic nie będziemy dodatkowego zakładać.

4. W zbiorze zdarzeń istnieje zdarzenie niezdeterminowane, tzn. takie zdarzenie f, dla którego prawdziwym jest wyrażenie $\bar{D}(f)$. Warunek ten nie występuje w definicji 1 explicite może dlatego, iż jest oczywisty, bowiem, jak łatwo wykazać, koncepcja Słupeckiego bez założenia tego warunku nie miałaby sensu.

5. Dalej wprowadzana jest relacja * opisywalności zdarzenia f zdaniem p: p * f; czytamy: zdanie "p" opisuje zdarzenie f.

6. Zbiór zdań opisujących zdarzenia jest algebrą absolutnie wolną $\underline{S} = (S, \vee, \wedge, \sim)$ (Słupecki takiego zdania nie formułuje, sądzimy jednakże, iż jest ono zgodne z jego intencjami), której działania spełniają warunki:

dla dowolnych $p, p_1 \in S$:

jeśli $p * f$ i $p_1 * f_1$, to $p \vee p_1 * f \vee f_1$;

jeśli $p * f$ i $p_1 * f_1$, to $p \wedge p_1 * f \wedge f_1$;

jeśli $p * f$, to $\sim p * f'$.

7. Dla każdego $p \in S$ istnieje $f \in Z$ takie, że $p * f$.

Słupecki nic nie stwierdza o strukturze zdań, których schematy należą do języka $\underline{S}$. Wiadomo tylko, że nie mogą to być zdania typu $D(f)$ (w chwili obecnej zdarzenie f jest zdeterminowane). Możemy jednakże przypuszczać, że zdanie o schemacie "p" opisujące zdarzenie f zawierać będzie nazwę, której desygnatem jest zdarzenie f. (Być może zdanie "p" winno także zawierać informacje o miejscu i o czasie w jakich zdarzenie f zaszło). Dwa zdania, w których występują dwie różne nazwy - jedna w jednym, druga w drugim zdaniu - są różne od siebie. Wydaje się sensowne (z uwagi na dokładność opisu zdarzeń) założenie, iż nazwy zdarzeń powinny być jednostkowe. Zatem, aby adekwatnie oddać myśl J. Słupeckiego warunek 7 należałoby zastąpić warunkiem następującym:

Dla każdego $p \in S$ istnieje dokładnie jedno $f \in Z$ takie, że $p * f$. Argumentem za przyjęciem takiego właśnie warunku jest również aksjomat A2 systemu W zawartego w warunku 3[4].

8. Przy użyciu następującej notacji:

$1(p)$ - zdanie "p" jest prawdziwe;

$0(p)$ - zdanie "p" jest fałszywe;

$1/2(p)$ - zdanie "p" ma trzecią wartość logiczną,

Słupecki formułuje założenia:

jeśli $p * f$, to $[1(p)$ wtw $D(f)]$;

jeśli $p * f$, to $[0(p)$ wtw $D(f')]$;

jeśli $p * f$, to $[1/2(p)$ wtw $\bar{D}(f)]$.

W dalszym ciągu pracy[5] pokazano, na podstawie warunków 1-8, że język $\underline{S}$ jest homomorficzny z algebrą $Ł_o$.

3. DOWÓD ADEKWATNOŚCI KONSTRUKCJI Z CZĘŚCI 1 WZGLĘDEM METODY CZĘŚCIOWEJ INTERPRETACJI $Ł_3$

Wykażemy teraz, że część spośród warunków 1-8 implikuje konstrukcję opisaną na s. 4 i właśnie z tego powodu rozumowania Słupeckiego dają w efekcie częściową interpretację $Ł_3$. Innymi słowy konstrukcja ta jest implicite w owych rozumowaniach zawarta.

---

[4] J. Słupecki, A generalization of modal logic, "Studia Logica" 1971, nr 28, s. 7-13.

[5] Słupecki, Próba intuicyjnej interpretacji...

Fakt 1.

Niech $\underline{Z} = (Z, \vee, \wedge, ')$ będzie algebrą typu (2, 2, 1) taką, że:
a) dla dowolnego $f \in Z$: $f'' = f$,
b) na Z określona jest pewna niepusta binarna relacja $\mapsto$ spełniająca (P3) (s. 5).

Wówczas: jeżeli istnieje $f \in Z$ takie, że $\bar{D}(f)$ (gdzie $\bar{D}(f)$ określone tak, jak na s. 6, wzór 1), to zbiory:

$Z_1 = \{f \in Z: D(f)\}$,
$Z_o = \{f \in Z: D(f')\}$,
$Z_{1/2} = \{f \in Z: \bar{D}(f)\}$

są elementami podziału zbioru Z.

Dowód: Na mocy założeń oczywiste jest, że $Z_1 \neq \emptyset$ i $Z_{1/2} \neq \emptyset$. Również $Z_o \neq \emptyset$, bowiem skoro $\exists f \in Z: D(f)$ (relacja $\mapsto$ jest niepusta) oraz $f = f''$, więc $f' \in Z_o$. Związek (P3) implikuje prawdziwość wyrażenia:

$\forall f \in Z$: jeżeli $D(f)$, to $\sim D(f')$.

Zatem na mocy a): $\forall f \in Z$: jeżeli $D(f')$, to $\sim D(f)$.

Wobec tego prawdziwa jest formuła: $\forall f \in Z$: $[\sim D(f)$ i $D(f')]$ wtw $D(f')$. A zatem: $Z_o = \{f \in Z: \sim D(f)$ i $D(f')\}$, zaś z definicji wyrażenia $\bar{D}(f)$: $Z_{1/2} = \{f \in Z: \sim D(f)$ i $\sim D(f')\}$, czyli Z_1, Z_o, $Z_{1/2}$ są parami rozłączone oraz $Z_1 \cup Z_o \cup Z_{1/2} = Z$.

Na mocy postulatów Słupeckiegio: 1, 2, 3 i 4 założenia faktu 1 są spełnione. Zatem spełniony jest warunek (1) (i) konstrukcji ze s. 4. Mianowicie, określony jest podział zbioru Z:

$$
\begin{aligned}
& Z_1 = \{f \in Z: D(f)\}; \\
(2) \quad & Z_o = \{f \in Z: D(f')\}; \\
& Z_{1/2} = \{f \in Z: \bar{D}(f)\}.
\end{aligned}
$$

Fakt 2.

Niech $\underline{Z} = (Z, \vee, \wedge, ', 1)$ będzie kratą De Morgana z jedynką, na której określony jest podział $p(Z) = \{Z_1, Z_{1/2}, Z_o\}$ taki, że $1 \in Z_1$, $0 \in Z_o$ (0 - element najmniejszy w kracie $\underline{Z}$).

Wówczas: relacja Θ odpowiadająca podziałowi $p(Z)$ jest kongruencją algebry $\underline{Z}$, wtw Z_1 jest filtrem pierwszym algebry $\underline{Z}$ oraz $Z_o = \tilde{Z}_1$ (dla dowolnego $X \subseteq Z$: $\tilde{X} = \{f \in Z: f' \in X\}$).

Dowód: Niech spełnione będą założenia faktu oraz niech Θ odpowiadająca $p(Z)$ będzie kongruencją kraty $\underline{Z}$. Wówczas oczywiście

$[1]_\Theta = Z_1$, $[0]_\Theta = Z_o$ oraz $\underline{Z}/\Theta = (\{Z_1, Z_{1/2}, Z_o\}\ \vee, \wedge, ', Z_1)$ jest trójelementową kratą De Morgana z jedynką (bo klasa krat De Morgana z jedynką tworzy rozmaitość) z elementem najmniejszym Z_o (bo $Z_1' = [1]_\Theta' = [1']_\Theta = [0]_\Theta = Z_o$).

Ponieważ w dowolnej kracie z jedynką, na której określona jest kongruencja Θ, zbiór $[1]_\Theta$ jest filtrem tej kraty, więc Z_1 jest filtrem algebry $\underline{Z}$. NIech $f \vee g \in Z_1$, a więc $[f \vee g]_\Theta = Z_1$, czyli $[f]_\Theta \vee [g]_\Theta = Z_1$. Zatem: $[f]_\Theta = Z_1$ lub $[g]_\Theta = Z_1$, czyli $f \in Z_1$ lub $g \in Z_1$, więc Z_1 jest filtrem pierwszym kraty $\underline{Z}$.

Niech $f \in \tilde{Z}_1$, czyli $f' \in Z_1$, zatem $[f_\Theta']_\Theta = Z_1$, lecz $[f']_\Theta = [f]_\Theta'$, czyli $[f]' = Z_1$, zatem $[f]_\Theta = Z_1' = Z_o$, czyli $f \in Z_o$. Wobec tego $\tilde{Z}_1 \subseteq Z_o$. Z drugiej strony niech $f \in Z_o$, czyli $[f]_\Theta' = Z_1$, a więc $f' \in Z_1$. Stąd $f \in \tilde{Z}_1$. Zatem $Z_o \subseteq Z_1$.

Niech Z_1 będzie filtrem pierwszym algebry $\underline{Z}$ oraz $Z_o = \tilde{Z}_1$. Wówczas spełnione są związki:

(1) $f_1 \wedge f_2 \in Z_1$ wtw $f_1 \in Z_1$ i $f_2 \in Z_1$;

(2) $f_1 \vee f_2 \in Z_1$ wtw $f_1 \in Z_1$ lub $f_2 \in Z_1$;

(3) $f \in Z_1$ wtw $f' \in Z_o$;

(4) $f' \in Z_1$ wtw $f \in Z_o$;

(5) $f \in Z_{1/2}$ wtw $f' \in Z_{1/2}$ (bo $Z_{1/2}' = Z_{1/2}$).

Niech Θ będzie relacją równoważności na Z odpowiadającą p(Z). Ze związków (3), (4), (5), łatwo otrzymać:

jeżeli $f_1 \equiv f_2(\Theta)$, to $f_1' \equiv f_2'(\Theta)$.

Niech $i, j \in \{1, 1/2, 0\}$. Gdy $i = 1$ lub $j = 1$, to z (2) otrzymujemy:

(6) jeżeli $f_1, g_1 \in Z_i$ i $f_2, g_2 \in Z_j$, to $f_1 \vee f_2, g_1 \vee g_2 \in Z_1$.

Z (4), (1) oraz odpowiedniego prawa De Morgana otrzymujemy: jeżeli $f_1, f_2 \in Z_o$, to $f_1 \vee f_2 \in Z_o$. Zatem:

(7) jeżeli $f_1, g_1 \in Z_o$ i $f_2, g_2 \in Z_o$, to $f_1 \vee f_2, g_1 \vee g_2 \in Z_o$.

Również łatwo dowieść prawdziwości wyrażenia:

(8) jeżeli $f_1, g_1 \in Z_{1/2}$ i $f_2, g_2 \in Z_{1/2}$, to $f_1 \vee f_2, g_1 \vee g_2 \in Z_{1/2}$

na mocy tego, iż: jeżeli $f_1, f_2 \in Z_{1/2}$, to $f_1 \vee f_2 \in Z_{1/2}$. To zaś spełnione jest, bowiem gdy $f_1, f_2 \in Z_{1/2}$, to na mocy warunków (2), (4), nie jest możliwe, aby $f_1 \vee f_2 \in Z_1$ lub $f_1 \vee f_2 \in Z_o$.

Analogicznie dowodzimy prawdziwości wyrażenia:
niech $i, j \in \{1/2, O\}$ oraz $i \neq j$

(9) jeżeli $f_1, g_1 \in Z_i$ i $f_2, g_2 \in Z_j$, to $f_1 \vee f_2, g_1 \vee g_2 \in Z_{1/2}$.

Z (6), (7), (8), (9), otrzymujemy:

$\forall i, j \in \{1, 1/2, O\}$: jeżeli $f_1, g_1 \in Z_i$ oraz $f_2, g_2 \in Z_j$, to $\exists k \in \{1, 1/2, O\}$: $f_1 \vee f_2, g_1 \vee g_2 \in Z_k$, a zatem:

$\forall f_1, f_2, g_1, g_2 \in Z$: jeżeli $f_1 \equiv g_1(\Theta)$ i $f_2 \equiv g_2(\Theta)$, to $f_1 \vee f_2 \equiv g_1 \vee g_2(\Theta)$.

Ponieważ działanie "$\wedge$" zachowuje się dualnie względem "$\vee$", więc analogiczny związek otrzymamy dla "$\wedge$".

Ponieważ każda algebra Boole'a jest kratą De Morgana z jedynką, więc spójrzmy na algebrę zdarzeń Słupeckiego postulowaną w punkcie 1 jako na kratę De Morgana z jedynką. Oczywiście określony jest podział (2) nośnika tej algebry (fakt 1 przy założeniu, że $\underline{Z}$ nie jest już dowolną algebrą typu (2, 2, 1), lecz jest kratą De Morgana z jedynką jest oczywiście spełniony; nawiasem mówiąc, fakt 1 można by sformułować zakładając jedynie, iż $\underline{Z}$ jest algebrą z jedynym jednoargumentowym działaniem "$'$").

Zbiór $Z_1 = \{f \in Z: D(f)\}$ na mocy warunków (P2), (P4) (s. 5) jest filtrem kraty $\underline{Z}$, zaś na mocy (P1) jest filtrem pierwszym. Niech bowiem będą spełnione: $D(f_1)$ i $D(f_2)$. Czyli $\exists g_1 \in Z$: $g_1 \mapsto f_1$ oraz $\exists g_2 \mapsto f_2$. Na mocy (P4): $g_1 \wedge g_2 \mapsto f_1$ oraz $\exists g_2 \in Z$: $g_1 \wedge g_2 \mapsto f_2$. Zatem według (P2): $g_1 \wedge g_2 \mapsto f_1 \wedge f_2$, czyli $D(f_1 \wedge f_2)$. Jeśli zaś: $D(f_1 \wedge f_2)$, to natychmiast $D(f_1)$ i $D(f_2)$ z (P2). Analogicznie: jeśli $D(f_1 \vee f_2)$, to natychmiast z (P1): $D(f_1)$ lub $D(f_2)$. Ponadto: $Z_o = \{f \in Z: D(f')\} = \{f \in Z: f' \in Z_1\} = \tilde{Z}_1$.

Oczywiście $1 \in Z_1$, zaś $O \in Z_o$ (bo $O \in Z_1$).

Zatem relacja równoważności Θ odpowiadająca podziałowi (2) jest na mocy faktu 2 relacją kongruencji na $\underline{Z}$, czyli spełniony jest warunek (1) (ii) konstrukcji ze s. 4. Ponieważ klasa krat De Morgana z jedynką jest zamknięta na branie homomorficznych obrazów, więc algebra $\underline{Z}/\Theta$ jest kratą De Morgana z jedynką. Zatem spełniony jest warunek (1) (iii).

Na mocy warunków (5), (6), (7) Słupeckiego istnieje homomorfizm ψ: $\underline{S} \to \underline{Z}$, gdzie $\underline{S}$ jest językiem opisującym zdarzenia z Z, mianowicie dla dowolnego $p \in S$: $\psi(p) = f$ wtw $p * f$. Warunek (8) pokazuje jakie wartości logiczne przyjmują zdania z języka $\underline{S}$ w zależności od tego, jakiego rodzaju zdarzenia opisują. Ponieważ izomorfizm I: $\underline{Z}/\Theta \to \underline{Ł}_0$ jest postaci: $\forall i \in \{1, 1/2, 0\}$: $I(Z_i) = i$, więc na mocy (8) jest widoczne, iż wartościowanie h: $\underline{S} \to \underline{Ł}_0$ jest postaci: $h = I \circ h_\Theta \circ \psi$, gdzie $h_\Theta : \underline{Z} \to \underline{Z}/\Theta$.

Zatem spełniony jest warunek (2) konstrukcji ze s. 4.

4. KRYTYKA INTERPRETACJI $Ł_3$ SŁUPECKIEGO

W powyższych rozumowaniach wykorzystaliśmy założenie, że algebra zdarzeń $\underline{Z}$ jest kratą De Morgana z jedynką, nie korzystaliśmy zaś z warunku silniejszego, iż $\underline{Z}$ jest algebrą Boole'a. Identycznie postąpił Słupecki: przyjął, iż $\underline{Z}$ jest algebrą Boole'a, lecz korzystał z tego założenia tylko w tej mierze jakby $\underline{Z}$ była kratą De Morgana. Jest oczywiste, że wskazanie jakiego rodzaju algebrą jest algebra zdarzeń $\underline{Z}$ oraz z jakich elementów się składa jest podstawowym warunkiem otrzymania częściowej interpretacji $Ł_3$ metodą Słupeckiego (patrz s. 5). Otóż konstrukcja przedstawiona na stronie 4 "nie pozwala" na traktowanie algebry zdarzeń $\underline{Z}$ jako algebry Boole'a. Prawdziwe jest mianowicie zdanie: jeżeli $\underline{Z}$ jest algebrą spełniającą warunki (1)(i) - (1)(iii), to $\underline{Z}$ nie jest algebrą Boole'a. Bowiem klasa algebr Boole'a jest zamknięta na branie homomorficznych obrazów, a więc jeżeli $\underline{Z}$ jest algebrą Boole'a, to dla dowolnej kongruencji Θ na $\underline{Z}$ algebra ilorazowa $\underline{Z}/\Theta$ jest algebrą Boole'a. Jeżeli więc $\underline{Z}$ spełnia (1)(i) - (1)(iii), to $\underline{Z}/\Theta$ nie jest algebrą Boole'a, bo nie istnieje trójelementowa algebra Boole'a. Zatem $\underline{Z}$ nie jest algebrą Boole'a. Założenie więc, iż algebra zdarzeń jest algebrą Boole'a jest sprzeczne z konstrukcją, na której opiera się metoda częściowej interpretacji $Ł_3$. Innymi słowy, skoro konstrukcja ta jest implikowana przez warunki Słupeckiego - (2), (3), (4) oraz postulat, iż $\underline{Z}$ jest kratą De Morgana, to założenie, że $\underline{Z}$ jest algebrą Boole'a jest sprzeczne z koniunkcją tych warunków. Fakt ten można również bezpośrednio wykazać, nie powołując się na opisaną konstrukcję.

Fakt 3.

Niech $\underline{Z} = (Z, \vee, \wedge, ', 1, 0)$ będzie algebrą Boole'a taką, że

a) na Z określona jest pewna niepusta binarna relacja $\mapsto$,

b) istnieje $f \in Z$ takie, że $\bar{D}(f)$

gdzie $\bar{D}(f)$ wtw $\sim D(f)$ i $\sim D(f')$,

$D(f)$ wtw $\exists g \in Z: g \mapsto f$.

Wówczas:

1) jeżeli spełniony jest warunek:

(P1)'' dla dowolnych $f, f_1, f_2 \in Z$:

jeżeli $f \mapsto f_1$ lub $f \mapsto f_2$, to $f \mapsto f_1 \vee f_2$,

to nie jest spełniony warunek:

(P1)' dla dowolnych $f, f_1, f_2 \in Z$:

jeżeli $f \mapsto f_1 \vee f_2$, to $f \mapsto f_1$ lub $f \mapsto f_2$,

2) jeżeli spełniony jest warunek (P1)', to nie jest spełniony warunek:

(P2)' dla dowolnych $f, f_1, f_2 \in Z$:

jeżeli $f \mapsto f_1 \wedge f_2$, to $f \mapsto f_1$ i $f \mapsto f_2$.

Dowód:

ad. 1): Załóżmy (P1)'' oraz niech $f \in Z$ będzie takie, że $D(f)$ (relacja $\mapsto$ jest niepusta), tzn. $\exists g \in Z: g \mapsto f$. Mamy zatem: $g \mapsto f$ lub $g \mapsto 1$, więc na mocy (P1)'': $g \mapsto f \vee 1$, czyli $g \mapsto 1$, zatem $D(1)$.

Przypuśćmy niewprost, iż zachodzi (P1)'. Wobec tego, ponieważ dla dowolnego $f \in Z$:; $f \vee f' = 1$ i $g \mapsto 1$, więc $g \mapsto f$ lub $g \mapsto f'$. Zatem dla dowolnego $f \in Z$: $D(f)$ lub $D(f')$, czyli nie istnieje $f \in Z$ takie, że $\sim D(f)$ i $\sim D(f')$, co jest sprzeczne z założeniem b).

ad. 2): Załóżmy (P1)'. Wówczas 1 spełnia warunek: $\sim D(1)$. Bowiem, jeśli prawdą byłoby $D(1)$, to jak w ad. 1) wykazaliśmy, w zbiorze Z nie byłoby takich elementów f, że $\bar{D}(f)$.

Przypuśćmy niewprost, że zachodzi (P2)'. Niech dla pewnego $f \in Z$ spełnione jest $D(f)$ oraz $g \mapsto f$. Czyli: $g \mapsto f \wedge 1$. Zatem na mocy (P2)': $g \mapsto f$ i $g \mapsto 1$. Wobec tego istnieje $f_1 \in Z$ takie, że $f_1 \mapsto 1$, co jest sprzeczne z tym, iż spełnione jest $\sim D(1)$.

Zatem, posługując się metodą częściowej interpretacji $\mathcal{L}_3$ prof. Słupeckiego, nie można interpretować tej logiki jako takiej, której podlegać mają zdania opisujące zdarzenia rozważane przez rachunek prawdopodobieństwa. Rodzina wszystkich podzbiorów zbioru zdarzeń elementarnych dla danego doświadczenia losowego jest przecież algebrą Boole'a.

Słupecki nie poprzestaje na częściowej interpretacji $\mathcal{L}_3$. Wzbogaca mianowicie język $\underline{S}$ o opisujące zdarzenia funktory modalne L, M (Lp - konieczne jest, że p; Mp - możliwe jest, że p) oraz zdania nie opisujące zdarzeń, otrzymując język $\underline{S}^* = (S^*, \vee, \wedge, \sim, L, M)$, gdzie $S \subsetneq S^*$. Następnie, na podstawie pewnych założeń, otrzymuje wartościowania h_v języka $\underline{S}^*$ w trójwartościową algebrę Łukasiewicza $\underline{Ł} = (\{1, 1/2, 0\}, \vee, \wedge, \sim, \sigma_1, \sigma_2)$[6]. Mianowicie:

$$\forall p \in Var(\underline{S}^*): h_v(p) = \begin{cases} h(p), & \text{gdy } p \in Var(\underline{S}), \\ v(p), & \text{gdy } p \in Var(\underline{S^* - S}), \end{cases}$$

($S^* - S$ jest nośnikiem podalgebry $\underline{S}^*$, $Var(\underline{S}^*)$ - zbiór generatorów algebry $\underline{S}^*$), gdzie h jest wartościowaniem języka $\underline{S}$ opisującego zdarzenia w $\underline{Ł}_o$ otrzymanym metodą częściowej interpretacji, zaś v jest dowolnym wartościowaniem w matrycę logiki klasycznej.

Jest oczywiste, iż zarzuty do częściowej interpretacji $\mathcal{L}_3$ dotyczą również powyższej interpretacji pełnej. Nie można na gruncie metody Słupeckiego interpretować trójwartościowej logiki Łukasiewicza jako takiej, której podlegają zdania, wśród których znajdują się zdania opisujące zdarzenia rozważane w rachunku prawdopodobieństwa.

Uniwersytet Łódzki
Katedra Logiki i Metodologii Nauk

Marek Nowak

ON POSSIBILITIES OF INTERPRETING ŁUKASIEWICZ´ TRIVALENT LOGIC BY MEANS OF J. SŁUPECKI´S METHOD

The aim of this article is to evaluate critically possibilities of interpreting Łukasiewicz´ logic by means of J. Słupecki´s method presented in reference (1). In paragraph 1, we are giving a formal construction on which the method of partial interpretation $\mathcal{L}_3$ is based. Paragraph 2 contains initial assumptions through which prof. J. Słupecki obtains the partial interpretation $\mathcal{L}_3$. In paragraph 3, we prove that the way of obtaining this interpretation is really based on the construction from paragraph 1. Finally, in paragraph 4, we present our opinion on the interpretation $\mathcal{L}_3$. We prove that this interpretation cannot be obtained by means of the applied method.

[6] G. Malinowski, Algebraiczna interpretacja k-wartościowch logik Łukasiewicza, "Acta Universitatis Lodziensis" 1976, ser. I, z. 9, s. 17.