

*Danuta Wróbel, Alicja Zielińska**

NAUCZANIE JĘZYKA POLSKIEGO JAKO OBCEGO W ZAKRESIE MATEMATYKI CHARAKTERYSTYKA PROCESU DYDAKTYCZNEGO I TREŚCI KSZTAŁCENIA

Słowa kluczowe: treści nauczania w matematyce, język polski w matematyce, weryfikacja efektów nauczania

Streszczenie. Artykuł powstał na podstawie długoletnich doświadczeń autorek przygotowujących cudzoziemców do studiów w Polsce. Pokazujemy cele, fazy i metody nauczania języka polskiego jako obcego w zakresie matematyki. W tabeli prezentujemy szczegółowe treści kształcenia wraz ze słownictwem, strukturami gramatycznymi, specyficznymi zwrotami i wymaganymi umiejętnościami językowymi. Omawiamy też metody sprawdzania kompetencji językowych słuchaczy.

1. CHARAKTERYSTYKA NAUCZANIA

Celem nauczania jest przygotowanie młodzieży polonijnej i zagranicznej do studiów w Polsce. Język podręczników akademickich do matematyki różni się dość istotnie od ogólnej polszczyzny. Zawiera on specyficzne zwroty i struktury gramatyczne, np. *ciąg zbieżny do granicy*, *rozwinąć funkcję w szereg*. Szczególnie trudne dla cudzoziemców są konstrukcje zdań, które zaczynają się rzeczownikiem w narzędniku lub w bierniku. W ten sposób bardzo często formułowane są w matematyce definicje, np.:

Wielomianem stopnia n nazywamy funkcję postaci

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0, \quad a_n \neq 0$$

lub inaczej

* alicjazel@tlen.pl; danutawrobel77@wp.pl; Studium Języka Polskiego dla Cudzoziemców, Uniwersytet Łódzki, 90-231 Łódź, ul. Matejki 21/23.

Funkcję postaci $W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, $a_n \neq 0$ nazywamy wielomianem stopnia n .

Niektóre nazwy występujące w matematyce nie istnieją w języku ogólnym (*różniczka, asymptota, iloczyn skalarny wektorów*) albo mają zupełnie inne lub przesunięte znaczenie (*kombinacja, wariacja, funkcja, ciało*) (Wróbel i in. 2014, Józwiak i in. 1999). Język polski matematyki zawiera wiele nazw, które nie są tzw. internacjonalizmami pochodzącymi bezpośrednio czy pośrednio z łaciny lub greki, a występują np. w języku angielskim, francuskim, rosyjskim. I tak:

całka – ang. *integral*, franc. *intégrale*, ros. *интеграл*;

liczba wymierna – ang. *rational number*, franc. *nombre rationnel*, ros. *рациональное число*;

macierz – ang. *matrix*, franc. *matrice*, ros. *матрица*

(Józwiak i in. 1999, Wróbel, Zielińska 1995).

W literaturze glottodydaktycznej można znaleźć niewiele pozycji omawiających te zagadnienia, wobec tego autorki musiały oprzeć się prawie wyłącznie na własnych, wieloletnich badaniach i doświadczeniach. Doświadczenia te zostały również wykorzystane w podręcznikach (Wróbel i in. 2011, 2014), które powstały we współpracy z polonistą – glottodydaktykiem.

Program językowy został opracowany w oparciu o dokładną analizę potrzeb (przygotowanie do studiów w języku polskim) i możliwości naszych słuchaczy (kompetencje w zakresie języka ogólnego, czas nauki, przygotowanie merytoryczne). Inaczej mówiąc, stosujemy tu metodę polegającą na dokładnej analizie warunków, w których realizujemy zadanie główne, jakim jest przygotowanie do studiów, jak również zadania cząstkowe stawiane w trakcie realizacji programu (rozumienie tekstu matematycznego, komunikowanie się z wykładowcą i z kolegami w zakresie omawianego tematu). Prezentujemy tu program dla grup politechnicznych, który jest realizowany w ciągu 135 godzin lekcyjnych. Grupy ekonomiczne realizują ten sam program w ciągu 125 godzin, z konieczności więc pomija się niektóre tematy, a zadania rozwiązywane na zajęciach i zadawane do domu są łatwiejsze merytorycznie, choć nie językowo.

Nauczanie języka polskiego jako obcego w zakresie matematyki charakteryzuje się niecałkowitą zbieżnością faz nauczania z poziomami kompetencji w języku obcym wg ESOKJ (Janowska 2011). Mamy tu do czynienia z krzyżowaniem się kompetencji, np. w stadium nauczania, gdy w zakresie sprawności mówienia studenci są nadal na poziomie A2, w zakresie czytania ze zrozumieniem muszą sięgać poziomu B2. Program ułożony jest tak, aby nie wprowadzać sztucznych form, odbiegających od języka używanego w podręcznikach i od typowych zachowań językowych nauczycieli akademickich. W początkowym stadium nauczania świadomie powstrzymujemy się od stosowania trudniejszych form fleksyjnych i upraszczamy składnię. Zabiegi te mają na celu maksymalne dostosowanie nauczania języka matematyki do poziomu języka ogólnego słuchaczy. W później-

szych fazach wracamy do tych samych zagadnień matematycznych, używając bogatszych form językowych (por. Wróbel i in. 2011, Wróbel i in. 2014). Program jest realizowany w trzech fazach:

FAZA I. 40 GODZIN. KURS WSTĘPNY

W pierwszej fazie zakładamy, że zjawiska językowe charakterystyczne dla poziomu A1 są znane słuchaczom. Absolutną większość w tej fazie stanowią zjawiska z poziomu A2. Osiągnięcie tego poziomu kompetencji komunikacyjnej w zakresie matematyki jest szczególnym celem tej fazy, ze względu na treści merytoryczne nie można jednak uniknąć nielicznych zjawisk z wyższych poziomów kompetencji językowej. Np. w zasobie *Słownika minimum języka polskiego* Haliny Zgółkowej (2009), który wyznacza znajomość leksyki na poziomie A2 polszczyzny ogólnej, brak obecnych już w pierwszej lekcji matematyki przymiotników *parzysty* i *nieparzysty*. W tej fazie kursu stosujemy prawie wyłącznie definicje ostensywne (przez przykład), głównie przy wprowadzaniu pojęć geometrii elementarnej (Wróbel 1991, por. też Wróbel i in. 2011, s. 31–39) lub definicje formalne przez postulaty, jak np. definicje spójników logicznych (Wróbel i in. 2011, s. 62–65). Nie wprowadzamy tu również języka dowodów matematycznych, z wyjątkiem takich pojęć, jak: twierdzenie, dowód, założenie, teza.

FAZA II. 84 GODZINY. FUNKCJE, CIĄGI, SZEREG GEOMETRYCZNY ELEMENTY ANALIZY MATEMATYCZNEJ

Zakładamy znajomość języka polskiego ogólnego na poziomie A2. Szczególnym celem tej fazy nauczania jest osiągnięcie kompetencji komunikacyjnej w zakresie matematyki na poziomie B1 (poprzez metodyczne rozwijanie kompetencji) z elementami poziomów wyższych B2 i C1 (tylko, gdy jest to niezbędne ze względów merytorycznych). Wprowadzamy język definicji oraz dowodów twierdzeń matematycznych.

FAZA III. 11 GODZIN. ELEMENTY GEOMETRII ANALITYCZNEJ ELEMENTY KOMBINATORYKI. WPROWADZENIE DO RACHUNKU PRAWDOPODOBIENSTWA

Celem trzeciej fazy nauczania jest wdrożenie wybranych zjawisk języka matematyki. Zakładamy taką biegłość w języku polskim, aby słuchacze mogli rozwiązywać zadania z tekstem (szczególnie z rachunku prawdopodobieństwa i kombinatoryki), co sprowadza się do poziomu co najmniej B1. Wprowadzamy

więcej zjawisk z poziomów B2 i C1. Pogłębiamy rozumienie twierdzeń w postaci warunku koniecznego i warunku dostatecznego oraz utrwalamy umiejętności formułowania takich twierdzeń. Dla studentów jest to bardzo trudne ze względów językowych i logicznych (por. ćwiczenia językowe Wróbel i in. 2014, s. 188–191).

Biorąc pod uwagę warunki realizacji postawionych zadań, musimy przede wszystkim skupić się na funkcji komunikacyjnej języka polskiego w zakresie matematyki i koncentrować się na sprawnościach receptywnych (rozumienie i czytanie tekstu pisanego z użyciem symboli matematycznych, rozumienie tekstu mówionego). Kształcenie sprawności produktywnych uzależniamy od kompetencji w zakresie języka ogólnego, ale słuchacz musi przynajmniej porozumieć się po polsku w formie ustnej i pisemnej z egzaminatorem w zakresie podanym w materiałach (Wróbel, Zielińska 2014).

Po zakończeniu kursu student powinien:

- rozumieć wypowiedziane w naturalnym tempie i tonie pytania oraz ustne polecenia nauczyciela/egzaminatora dotyczące rozwiązywania problemów matematycznych,
- rozumieć treść tekstów zapisanych po polsku z użyciem symboli matematycznych,
- umieć głośno przeczytać polski tekst zawierający symbole matematyczne, z dopuszczeniem obcego akcentu, który jednak nie zakłóca komunikacji,
- umieć sformułować pisemnie odpowiedzi do zadań na pracach kontrolnych i egzaminie końcowym oraz opisać przebieg rozumowania w trakcie rozwiązywania zadań lub przeprowadzania dowodu,
- umieć ustnie formułować wypowiedzi przekonujące, że rozumie treść postawionych przed nim zadań.

Terminy matematyczne wprowadzane są w szczególny sposób: są one jednoznaczne co do postulatów (często aksjomatów), które muszą spełniać. Tak wprowadzane są przede wszystkim relacje jedno-, dwu- lub wieloargumentowe oraz predykaty. Dobrym przykładem jest definiowanie działań (arytmetycznych, logicznych i teoriomnogościowych) przez algebrę Boole’a, czyli pewną strukturę. Sprawdzanie poziomu kompetencji językowej naszych słuchaczy powinno się więc odbywać poprzez sprawdzanie rozumienia tekstu zawierającego terminy matematyczne lub przez formułowanie zdań prawdziwych zawierających takie terminy. Stąd w naszych podręcznikach mamy zadania typu: *Podaj wartość logiczną zdania*. Dotyczy to zarówno zdań prostych, w których konieczne jest zrozumienie treści zdania, jak i złożonych (zawierających funktory zdaniotwórcze od argumentów zdaniowych), w których rozumienie składowych zdań prostych nie zawsze jest konieczne (por. Wróbel i in. 2011, s. 29, 41, 66–67). Taka sytuacja

zależą od tego, czy funktory są ekstensjonalne czy też intensjonalne.

W języku sformalizowanym równościowa definicja terminu matematycznego x musi spełniać warunki: 1) $\bigvee_x \varphi(x)$ i 2) $\bigwedge_{x_1, x_2} (\varphi(x_1) \wedge \varphi(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$ czyli warunek istnienia (w sensie istnienia bytów matematycznych) i warunek jednoznaczności. Wobec tego zasadne są polecenia i pytania: *Proszę podać przykład terminu x .* lub *Czy x jest φ ?* (por. Wróbel i in. 2011, s. 16–17, 23; Wróbel i in. 2014, s. 86, 111). Poprawne odpowiedzi świadczą z dużym prawdopodobieństwem o rozumieniu terminu x . Aby zmniejszyć liczbę trafień losowych wprowadzamy również pytania typu: *Czy zdanie jest prawdziwe czy fałszywe, czy też nie można tego wiedzieć (nie wiadomo)?* (Wróbel i in. 2011, s. 46, 66–67). Z uwagi na wymaganie jednoznaczności, dobrym sprawdzianem rozumienia i umiejętności użycia tych terminów są zadania typu: *Uzupełnij zdania tak, aby były one prawdziwe* (Wróbel i in. 2011, s. 41, Wróbel i in. 2014, s. 112–113, 193–194).

Ważnym elementem kompetencji językowej w zakresie matematyki jest rozumienie poleceń do zadań matematycznych. Aby rozwiązać zadanie, nawet bardzo łatwe, trzeba zrozumieć polecenie. Przykładem sprawdzania umiejętności w tym zakresie są proste zadania z geometrii elementarnej, jak np. *Obliczyć wysokość trójkąta prostokątnego o przyprostokątnych 2 cm opuszczonej z wierzchołka kąta prostego*. W tym zadaniu nie tyle chodzi o sprawdzenie wiedzy matematycznej (poziom polskiego gimnazjum), ale języka polskiego zadań geometrycznych (Wróbel i in. 2011, s. 41). W sprawdzianach stosujemy też różne, ale mające takie same lub podobne znaczenie, polecenia, jak np. *Wykonać wykres.*, *Sporządzić wykres.*, *Naszkicować wykres.* czy też *Wyznaczyć ekstrema globalne funkcji.*, *Podać najmniejszą i największą wartość funkcji*. Sprawdzamy również umiejętność czytania wzorów i zapisów symbolicznych, ale w przypadku skomplikowanych zdań, np. definicji Cauchy’ego granicy funkcji w punkcie x_0 :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g \Leftrightarrow \bigwedge_{\varepsilon > 0} \bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{x \in D} (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - g| < \varepsilon)$$

nie wymagamy poprawności gramatycznej, o ile nie zakłóca to komunikacji (np. egzaminator rozumie studenta). W obu podręcznikach Wróbel i in. (2011, 2014) obecne są też ćwiczenia językowe pokazujące różne sformułowania tego samego twierdzenia, np. w formie zdania warunkowego, warunku koniecznego, warunku dostatecznego lub też kontrapozycji podstawowego twierdzenia (np. Wróbel i in. 2011, s. 80). Dobrym sprawdzianem rozumienia tekstu jest pisanie schematów zdań zarówno w języku klasycznego rachunku zdań (użycie funktorów ekstensjonalnych) (Wróbel i in. 2011, s. 71; Wróbel i in. 2014, s. 194–195), jak i w języku klasycznego rachunku predykatów (Wróbel i in. 2011, s. 76).

TREŚCI KSZTAŁCENIA

W załączonej tabeli opisującej szczegółowe treści nauczania podajemy przede wszystkim takie słownictwo z zakresu matematyki, które nie istnieje w języku ogólnym (np. logarytm, homografia, radian), które ma w matematyce inne lub przesunięte znaczenie (czynnik, liczba wymierna, parabola) bądź inne kolokacje (np. zbieżny do..., wzór na..., styczna do...). Wobec tego, terminy matematyczne podajemy w ich typowym otoczeniu językowym (kolumna: *Struktury grammatyczne i specyficzne zwroty*). Niektóre pojęcia występujące w podręcznikach matematycznych mają w języku ogólnym nieostre znaczenie, zatem ucząc języka matematyki trzeba takie pojęcia doprecyzować. Np. zdanie złożone ze spójnikiem *lub* jest w języku ogólnym często rozumiane jak dyzjunkcja *albo...albo...* (zdanie $2 \geq 2$ jest prawdziwe), zdanie *Niektóre prostokąty są kwadratami* oznacza w matematyce *Istnieje prostokąt, który jest kwadratem*. Pokazujemy też, jak te same treści matematyczne można wyrazić różnymi sposobami, np. funktor koniuncji \wedge można opisać międzydaniowym: *i, a, ale, lecz, również, oraz, także, ani* (por. Wróbel i in. 2011). W przedostatniej kolumnie zawarto kompetencje językowe, jakie słuchacze powinni uzyskać na danym etapie nauczania.

TREŚCI KSZTAŁCENIA

Tematyka	Słownictwo	Struktury gramatyczne i specyficzne zwroty	Działania językowe i umiejętności	Godz. lek.
Cyfy, liczby naturalne, liczby całkowite.	liczba, cyfra, liczebnik główny, plus, minus, znak (liczby), zbiór, element zbioru, należeć do, liczba parzysta, liczba nieparzysta	To jest + M 5 to jest liczba naturalna. To nie jest liczba całkowita. M 5 należy do + D Czy to jest liczba parzysta? Czy 5 to jest element zbioru N?	Czytanie symboli $a \in N$; $b \notin C$. Zapisywanie symbolami wyrażonych słowami zdań w rodzaju: $1123 \in N$; $-78 \notin C$.	1
Działania arytmetyczne.	działania arytmetyczne, dodawanie, odejmowanie, mnożenie, dzielenie, wynik, suma, różnica, iloczyn, iloraz, składnik, czynnik, równa się, zadanie, obliczyć	Co robimy? Dodajemy + B . Proszę dość + B Odejmiemy – odjąć. Mnożymy – pomnożyć, pomnożyć przez 3 . Dzielimy – podzielić, podzielić przez 5 .	Nazywanie elementów działań arytmetycznych. Rozumienie poleceń wykonania takich działań.	2
Relacje: $=$, $<$, $>$, \leq , $>$, \geq	równe, większe niż, mniejsze niż, większe lub równe, mniejsze lub równe, liczba dodatnia, liczba ujemna, liczby przeciwne; prawda, fałsz		Czytanie nierówności. Zapisywanie symbolami nierówności wyrażonych słowami, napisanych lub dyktowanych.	3
Ułamki zwykłe, dziesiętne, liczby mieszane. Procent, punkt procentowy.	liczebni porządkowe, licznik, mianownik, kreska ułamkowa, ułamek zwykły, wspólny mianownik, skrócić ułamek, ułamek skracalny, nieskracalny, dziesiętnik, liczba pierwsza, część, całość, ułamek dziesiętny, rodzaje ułamków dziesiętnych (skończony, nieskończony, okresowy, nieokresowy), okres ułamka dziesiętnego, nawias, otworzyć nawias, zamknąć nawias.	Pod kreską - nad kreską, w liczniku, w mianowniku, w okresie, w nawiasie. (M) Zamienić ułamek zwykły na ułamek dziesiętny. Jaki procent liczby a stanowi liczba b?	Czytanie ułamków zwyczajnych, czytanie ułamków dziesiętnych, pisanie ze słuchu ułamków i działań.	4-7 (4)
Podstawowe figury geometryczne.	punkt, prosta, półprosta, odcinek, kąt, kąt ostry, prosty, rozwarty, pełny, półpełny, stopień, wierzchołek, ramiona; proste równoległe, proste prostopadłe; trójkąt, trójkąt ostrokątny, prostokątny, rozwartokątny, bok, trójkąt równoboczny, równoramienny, wysokość, podstawa; czworokąt, przkątna, kwadrat, prostokąt, romb, równoległobok, trapez, pięciokąt, sześciokąt, ... wielokąt, krzywa, koło, okrąg, środek, promień, figura geometryczna, płaszczyzna, długość, pole i obwód, wzór, twierdzenie, bryła, sześcián, prostopadłościan, ściana, krawędź, graniastosłup, ostrosłup, bryły obrotowe, obrót, oś obrotu, walec, stożek, kula, objętość, pole powierzchni	Punkt leży na prostej. Proste przecinają się w punkcie <i>A</i> . Prosta <i>l</i> jest równoległa (prostopadła) do prostej <i>k</i> . Czy każdy kwadrat jest prostokątem? (<i>N</i>) Czy romb może być kwadratem? Czy trójkąt może mieć dwa kąty proste? Czy zawsze prostokąt jest równoległobokiem? Wzór na pole trójkąta. Znaleźć wzór na liczbę przekątnych <i>n</i> -kąta.	Nazywanie figur geometrycznych i ich elementów. Opisywanie własności figur. Czytanie ze zrozumieniem prostych zadań geometrycznych.	8-13 (6)

Liczby wymierne, niewymierne, rzeczywiste.	Definicja, liczba wymierna, niewymierna, rzeczywista, odwrotność liczby, rozwinięcie dziesiętne liczby, moduł liczby rzeczywistej, wartość bezwzględna liczby rzeczywistej	Przedstawić liczbę w postaci ułamka zwyčajnego. Przedstawić jako ułamek dziesiętny.	14 (1)
Potęga i pierwiastek. Wzory skróconego mnożenia.	Potęga, potęgować, podność do potęgi, podnosiwa i wykładnik potęgi, własności potęg, pierwiastek n -tego stopnia z liczby a , pierwiastek kwadratowy, założenie, zastrzeżenie, warunek, rozłożyć na czynniki, rozkład na czynniki, kwadrat sumy, różnicy, różnica kwadratów, sześciąt sumy, różnicy, suma i różnica sześciątów, wykonać działania	Podność/podnieść do potęgi (do kwadratu, do sześciannu, do piątej). Potęga o wykładniku naturalnym. Pierwiastek z dwóch, z trzech. Jeżeli... to... Rozłożyć/rozłożyć na czynniki. Włączyć czynnik pod pierwiastek, wyłączyć przed pierwiastek, wyłączyć przed nawias.	Czytanie potęg. Czytanie pierwiastków. Pisanie ze słuchu symboli potęg i pierwiastków. Formułowanie zastrzeżeń do niektórych operacji matematycznych. 15–17 (3)
Logarytm – definicja, własności.	logarytm przy podstawie a liczby b , podstawa logarytmu, liczba logarytmowana, logarytm dziesiętny, logarytm naturalny, logarytmować, logarytmowanie	Logarytm przy podstawie	Czytanie symboli logarytmów o dowolnej podstawie i zapisywanie tych symboli ze słuchu. 18–19 (2)
Elementy rachunku zdań i kwantyfikatorów	zdanie w sensie logicznym, zdanie w logice, zdanie prawdziwe, zdanie fałszywe, wartość logiczna zdania, funkcja zdaniowa, zmienna, zmienna liczbowa, zmienna zdaniowa, dziedzina, spełniać, schemat zdaniowy, podstawić, podstawienie, funkcji zdaniotwórcze, spójniki logiczne, negacja, alternatywa, koniunkcja, implikacja, założenie, teza, wniosek, wnioskować, kontrapozycja, sprzeczność, twierdzenie odwrotne, równoważność, „ p wtedy i tylko wtedy, gdy q ”, dowód, udowodnić, wykazać, tautologia, prawo logiczne, metoda zerojedynkowa, kwantyfikator, kwantyfikator duży, ogólny, kwantyfikator mały, szczegółowy	x_0 spełnia funkcję zdaniową $p(x)$ (pe od x). Dla każdego x rzeczywistego. $p(x)$. Dowieść – dowodzić – udowodnić. Dla każdego x należącego do zbioru R: $p(x)$. Wszystkie liczby naturalne są całkowite. Każda liczba naturalna jest całkowita. Żaden okrąg nie jest wielokątem. Istnieje x naturalne, takie że $p(x)$. Istnieje x należące do zbioru N, takie że $p(x)$. Niektóre romby są kwadratami.	Interpretacja funkcji prawdziwościowych klasycznej logiki zdań. Rozumienie i tworzenie schematów zdań złożonych. Czytanie i rozumienie zdań złożonych i zdań skwantyfikowanych. Formułowanie w języku polskim negacji zdań skwantyfikowanych. Opisywanie niektórych elementów dowodu. 20–29 (10)

<p>Elementy teorii mnogości. Działania na zbiorach, prawa rachunku zbiorów. Przedziały na osi liczbowej. Iloczyn kartezjański zbiorów. Prostokąny układ współrzędnych.</p>	<p>inkluzja, zawieranie zbiorów, podzbiór, zbiór pusty, przestrzeń, uniwersum, suma zbiorów, iloczyn, część wspólna zbiorów, różnica, dopełnienie zbioru do danej przestrzeni, zbiory rozłączne, os liczbową, jedność, zbiór skończony, zbiór nieskończony, nieskończoność, przedział otwarty, domknięty, lewostronnie domknięty, prawostronnie domknięty, para uporządkowana, iloczyn kartezjański, układ współrzędnych, płaszczyzna kartezjańska, współrzędne, odcięta, rzędna, początek układu współrzędnych, ćwiartka układu współrzędnych, określić współrzędne punktu, interpretacja graficzna</p>	<p>Zbiór A jest zawarty w zbiorze B. Zbiór A zawiera się w zbiorze B. Zbiór B zawiera zbiór A. Zbiór x całkowitych, takich że $p(x)$. Zbiór x należących do zbioru C, takich że $p(x)$. Przedział otwarty od a do plus nieskończoności. Przedział od minus dwóch do czterech.</p>	<p>Zapisywanie i czytanie symboli przedziałów liczbowych, relacji przynależności elementu do przedziału lub innego podzbioru R oraz relacji inkluzji. Nazywanie elementów i podzbiorów płaszczyzny kartezjańskiej.</p> <p>30-36 (7)</p>
<p>Wektory. Suma wektorów i iloczyn wektora przez liczbę. Translacja i symetria.</p>	<p>wektor zaczepiony, początek i koniec wektora, długość, kierunek i zwrot wektora, wektory o zwrotach zgodnych i wektory o zwrotach przeciwnych, równość wektorów, współrzędne wektora, interpretacja geometryczna, wektor swobodny, zaznaczyć w układzie współrzędnych, zaznaczyć na płaszczyźnie kartezjańskiej, translacja, przesunięcie równoległe, obraz, symetria, symetria osiowa, symetria względem prostej, os symetrii, symetria środkowa, środek symetrii, symetria względem punktu, symetryczny</p>	<p>Przesunięcie o wektor. Symetria względem prostej, względem punktu. Obraz punktu A w symetrii względem... Obraz punktu A w przesunięciu o wektor. Obraz punktu A w translacji o wektor. Odbić figurę f symetrycznie względem....</p>	<p>Opisywanie wektorów oraz podstawowych przekształceń geometrycznych (translacja, symetria). Czytanie ze zrozumieniem prostych zadań geometrycznych związanych z tym tematem</p> <p>37-38 (2)</p>
<p>Prace kontrolne</p>		<p>Kurs wstępny</p> <p>38-40 (2×1)</p> <p>40</p>	

<p>Definicja funkcji. Sposoby określania funkcji. Wykres funkcji rzeczywistej zmiennej rzeczywistej. Własności funkcji. Funkcja odwrotna. Funkcja złożona. Przekształcenia wykresu funkcji.</p>	<p>funkcja, przekształcenie, przekształcać, odwzorowanie, odwzorowywać, przyporządkowanie, przyporządkować, określać funkcję, argument, wartość funkcji w punkcie x, wartość funkcji dla argumentu x, dziedzina, zbiór wartości funkcji, zmienna niezależna, zmienna zależna, funkcja rzeczywista, funkcja zmiennej rzeczywistej, wykres, sporządzać wykres, miejsce zerowe funkcji, różnowartościowość, funkcja, różnowartościowa, monotoniczność, funkcja monotoniczna, rosnąca, malejąca, funkcja rosnie, maleje, funkcja nierosnąca, niemalejąca, stała, przedziałami monotoniczna, ograniczoność, funkcja ograniczona, funkcja ograniczona z dołu, z góry, parzystość, nieparzystość, funkcja parzysta, nieparzysta, okresowość, okres funkcji, okres podstawowy, funkcja okresowa, kres górny funkcji, kres dolny, ekstremum globalne, ekstremum absolutne, maksimum, minimum, funkcja odwrotna, odwrotna, złożona, złożenie funkcji, superpozycja funkcji</p>	<p>Niech X będzie danym zbiorem. y zależy od x Funkcja przekształca, odwzorowuje zbiór X w (na) zbiór Y. Wartość najmniejsza, wartość największa Została określona funkcja. Funkcja nie jest ani parzysta, ani nieparzysta. Badamy ograniczoność funkcji; funkcja jest ograniczona.</p>	<p>Formułowanie definicji równościowych i rekurencyjnych. Odczytywanie własności funkcji z wykresu. Opisywanie przekształceń wykresu (translacja o wektor, symetria względem osi układu współrzędnych lub względem początku układu współrzędnych).</p> <p>41–45 (5)</p>
<p>Funkcja i jej własności. Podstawowe równania i nierówności</p>	<p>funkcja liniowa, współczynniki, współczynnik kierunkowy, wyraz wolny, kąt nachylenia, parametr, równanie, rozwiązanie równania, rozwiązać równanie, niewiadoma, pierwiastek równania, równanie sprzeczne, równanie liniowe, nierówność liniowa, układ równań, układ nierówności, metody rozwiązywania układów równań (podstawiania, przeciwnych współczynników, graficzna, wyznacznikowa), wyznacznik macierzy, wiesz macierzy, kolumna macierzy, wymiar macierzy, układ oznaczony, nieoznaczony, sprzeczny</p>	<p>Pomnożyć stronami. Dodać do obu stron. Rozwiązanie postaci: ... i-tą kolumnę zastępujemy holumną wyrazów wolnych.</p>	<p>Opisywanie operacji matematycznych wykonywanych przy rozwiązywaniu równań, nierówności oraz układów równań i nierówności.</p> <p>46–55 (10)</p>

<p>Funkcja kwadratowa, wielomian, funkcja wymierna, potęgowa, wykładnicza, logarytmiczna, funkcje trygonometryczne.</p>	<p>funkcja kwadratowa, trójmian kwadratowy, wyróżnik (delta) trójmianu kwadratowego, parabola, wierzchołek i ramiona paraboli, postać kanoniczna trójmianu kwadratowego, wielomian, stopień wielomianu, reszta z dzielenia, warunek konieczny, warunek dostateczny (wystarczający), dowód nie wprost, funkcja wymierna, homografia, funkcja homograficzna, asymptoty, asymptota pionowa, asymptota pozioma, hiperbola, gałąź hiperboli, funkcja potęgowa, funkcja wykładnicza, funkcja logarytmiczna, funkcje trygonometryczne (sinus, cosinus, tangens, cotangens), kąć skierowany (zorientowany), miara stopniowa, miara łukowa, łuk, radian, wzory redukcyjne, tożsamość, tożsamość trygonometryczna, jedynka trygonometryczna</p>	<p>Ramiona paraboli są skierowane ku górze (ku dołowi), (C) Ramiona paraboli są skierowane do góry (do dołu). Sprowadzić (trójmian kwadratowy) do postaci kanonicznej. Rozłożyć wielomian na czynniki. Zależny, że... Warunkiem koniecznym podzielności liczby przez 4 jest podzielność tej liczby przez 2. Warunkiem koniecznym na to, aby liczba dzieliła się przez 4, jest podzielność tej liczby przez 2. ..., co kończy dowód. c.b.d.o. (co było do okazania) cnd. (co należało dowieść) Na mocy wzoru (!), mamy... Stąd wynika... Z tego wynika... Wobec tego... Zatem...</p>	<p>Formułowanie twierdzeń i dowodów twierdzeń (wprost i nie wprost). Rozumienie twierdzeń w postaci warunku koniecznego i warunku dostatecznego oraz warunku koniecznego i dostatecznego.</p> <p>56–82 (27)</p>
<p>Prace kontrolne</p>		<p>83–86 (2×2)</p>	
<p>Funkcja i jej własności. Podstawowe równania i nierówności.</p>			
<p> Ciąg liczbowy. Monotoniczność i ograniczoność ciągu. Ciąg arytmetyczny. Ciąg geometryczny. Symbole $n!$ i $\binom{n}{k}$. Granica ciągu. Twierdzenia o granicach. Szereg liczbowy. Szereg geometryczny.</p>	<p>ciąg, ciąg liczbowy, wyraz ciągu, wyraz ogólny ciągu, n-ty wyraz ciągu, ciąg skończony, ciąg nieskończony, ciąg arytmetyczny, różnica ciągu arytmetycznego, ciąg geometryczny, iloraz ciągu geometrycznego, n-ta suma częściowa ciągu, suma n początkowych wyrazów ciągu, n silnia, n po k, n nad k, symbol Newtona, granica ciągu, prawie wszystkie wyrazy ciągu, otoczenie punktu, granica właściwa, granica niewłaściwa, ciąg zbieżny, ciąg rozbieżny do plus lub minus nieskończoności, lines, dowolnie małe, symbol nieoznaczony, szereg liczbowy, szereg zbieżny i szereg rozbieżny, suma szeregu, szereg geometryczny</p>	<p>Funkcja i jej własności. Podstawowe równania i nierówności. n dąży do nieskończoności. Ciąg jest zbieżny do g.</p>	<p>Różne sposoby czytania symboli granicy ciągu i sum nieskończonych. Różne sformułowania definicji granicy ciągu w języku polskim.</p> <p>87–98 (12)</p>
<p>Praca kontrolna</p>		<p>99–100 (2)</p> <p>14 Ciągi. Szereg geometryczny.</p>	
<p>Ciągi. Szereg geometryczny.</p>			

Granica funkcji Ciągłość funkcji w punkcie i w przedziale.	granica funkcji f w punkcie x_0 ; granica funkcji f , gdy x dąży do x_0 ; granica prawostronna, lewostronna, jednostronna, funkcja ciągła, ciągłość funkcji; punkt nieciągłości; funkcja elementarna	granica funkcji f w punkcie x_0 ; granica funkcji f , gdy x dąży do x_0 ; granica prawostronna, lewostronna, jednostronna, funkcja ciągła, ciągłość funkcji; punkt nieciągłości; funkcja elementarna	101–110 (10)
	Pochodna funkcji w punkcie i jej interpretacja geometryczna Pochodne wyższych rzędów. Asymptoty. Badanie przebiegu zmienności funkcji.	Co najniższej, przynajmniej, co najwyższej. Funkcja osiąga ekstremum, funkcja przyjmuje wartość maksymalną. Styczna do krzywej w punkcie A .	Opisywanie przebiegu zmienności funkcji. Różne sformułowania w języku polskim warunku koniecznego, warunku dostatecznego oraz warunku koniecznego i dostatecznego. Transformacje tekstu matematycznego.
Praca kontrolna			123–124 (2)
Granica i ciągłość funkcji. Pochodna.			
24			
Iloczyn skalarny i wyznacznik pary wektorów. Równania prostej. Równanie okręgu. Styczna do okręgu.	skalar, iloczyn skalarny wektorów, wyznacznik pary wektorów, środek odcinka, równanie krzywej, równanie kierunkowe prostej, równanie ogólne prostej, równanie parametryczne prostej, symetralna odcinka, dwusieczna kąta, środkowa boku trójkąta, środek ciężkości trójkąta	Odległość punktu od prostej. Przez punkt A poprowadzić prostą. Kąt zawarty między prostymi.	125–130 (6)
Geometria analityczna			
Geometria analityczna			6

<p>Elementy kombinatoryki. Zdarzenia losowe, działania na zdarzeniach. Klasyfikacja definicja prawdopodobieństwa. Własności prawdopodobieństwa.</p>	<p>permutacja zbioru n-elementowego, k-wyrazowa wariacja bez powtórzeń ze zbioru n-elementowego, k-wyrazowa wariacja z powtórzeniami ze zbioru n-elementowego, k-elementowa kombinacja ze zbioru n-elementowego, losować, losowanie, gra losowa, losowanie ze zwracaniem (ze zwrotem), losowanie bez zwracania (bez zwrotu), kostka do gry, oczka na kostce, moneta, orzeł, reszka, urna, talia kart, zdarzenie losowe, zdarzenie elementarne, przestrzeń zdarzeń elementarnych, zdarzenie niemożliwe, zdarzenie pewne, zdarzenie przeciwne, zdarzenie sprzyjające, zdarzenia wykluczające się, zdarzenia jednakowo prawdopodobne (jednakowo możliwe), prawdopodobieństwo, rzut kostką do gry</p>	<p>Zbiór A zawiera n elementów. Zdarzenie sprzyjające zdarzeniu A. Zachodzi zdarzenie A. Wypadło 5 oczek. Orzeł pojawił się trzy razy.</p>	<p>Opisywanie zdarzeń i doświadczeń losowych oraz działań na zdarzeniach. Opisywanie przestrzeni probabilistycznych.</p>	<p>131–135 (5)</p>
<p>Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa</p>				<p>5</p>
<p>Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa</p>				<p>Razem 135</p>

BIBLIOGRAFIA

- Janowska I. (red.), 2011, *Programy nauczania języka polskiego jako obcego*, Kraków.
- Józwiak Z., Kondrak L., Wróbel D., Zielińska A., 1999, *Słownik polsko-angielsko-francusko-rosyjski podstawowych terminów matematycznych*, Łódź.
- Wróbel D., 1991, *Niedefinicyjne wprowadzanie pojęć matematycznych na zajęciach dla cudzoziemców*, w: „Acta Universitatis Lodziensis. Kształcenie Polonistyczne Cudzoziemców” nr 3, s. 63–74.
- Wróbel D., Zielińska A., 1995, *Przeładowe słowniki matematyczne; ich założenia i rola w kształceniu sprawności komunikacyjnej studentów polonijnych*. w: *Kształcenie sprawności komunikacyjnej Polaków ze Wschodu*, Lublin, s. 231–236.
- Wróbel D., Zielińska A., 2014, *Matematyka. Materiały przygotowujące do egzaminu ustnego* (mat. npubl.).
- Wróbel D., Zielińska A., Rudziński G., 2011, *Wstęp do matematyki. Podręcznik dla cudzoziemców*, Łódź.
- Wróbel D., Zielińska A., Rudziński G., 2014, *Matematyka po polsku. Podręcznik dla cudzoziemców*, Łódź.
- Zgólkowa H., 2009, *Słownik minimum języka polskiego*, Poznań.

Danuta Wróbel, Alicja Zielińska

TEACHING POLISH AS A FOREIGN LANGUAGE IN MATHEMATICS
CHARACTERISTICS OF THE TEACHING-LEARNING PROCESS AND LEARNING
CONTENTS

Keywords: mathematical learning contents, Polish in mathematics, verification of teaching effectiveness

Summary. The article is based on many years' authors experience in preparation of foreigners to study in Poland. We show the goals, phases and methods of teaching Polish as a foreign language in mathematics. In the table we present the detailed learning contents including vocabulary, grammatical structures, specific phrases and required language skills. We also discuss the methods of verification of teaching effectiveness.