https://doi.org/10.18778/1689-4286.44.01

HYBRIS nr 44 (2019)
ISSN: 1689-4286

KRYSTIAN BOGUCKI
UNIWERSYTET WARSZAWSKI

„CAŁA MATEMATYKA TO WŁAŚCIWIE GEOMETRIA" [1]. POGLĄDY GOTTLOBA FREGEGO NA PODSTAWY MATEMATYKI PO UPADKU LOGICYZMU

Wstęp

Motywacja dla powstania tego artykułu jest dwojaka. Po pierwsze, stanowi on omówienie rzadko reprezentowanego w literaturze (nawet anglojęzycznej) etapu w myśli Gottloba Fregego, mianowicie końcowego okresu twórczości niemieckiego filozofa, w którym radykalnie zmienił on swoje podejście do podstaw matematyki i uznał, iż całość poznania matematycznego ma swoje źródło w geometrii. Naświetlenie filozoficznych podstaw tej reorientacji może mieć, jak sądzę, ważne implikacje dla zrozumienia również szerzej znanych i omawianych poglądów z wcześniejszych dzieł filozofa z Jeny, w szczególności znaczenia wiedzy apriorycznej w ludzkim poznaniu oraz doktryny antypsychologistycznej. Po drugie, esej ten stanowi przyczynek do badań nad Kantowskimi źródłami filozofii Fregego, a w szczególności do sporu toczonego (głównie) między Michaelem Dummettem a Hansem Slugą dotyczącego realistycznej wykładni ontologii autora *Sensu i znaczenia*. Dummett uznaje Fregego za metafizycznego realistę oraz platonika, którego poglądy ukształtowały się w oparciu o krytykę idealizmu Heglowskiego (Dummett, 1991; Dummett, 1993). Sluga oponuje, iż idealizm niemiecki w drugiej połowie XIX wieku był stanowiskiem filozoficznie martwym, stąd fregowski antypsychologizm jest wymierzony w popularne ówcześnie w Niemczech nurty naturalistyczne. W rzeczywistości Frege powinien być uznany za reprezentanta tradycji idealizmu transcendentalnego w duchu Kanta, w

[1] W oryginale zdanie to brzmi: '(…) Die ganze Mathematik eigentlich Geometrie ist' (Frege, 1973, s. 241). Angielski przekład znajduje się w (Frege, 1979, s. 277).

szczególności jego rzekomy platonizm ulega zanegowaniu, bowiem obiektywność Myśli, liczb oraz pojęć była rozumiana w terminach charakterystycznych dla myśli neokantowskiej (Sluga, 1978; Sluga, 1980).

W swoim artykule wychodzę od opisu późnej koncepcji Fregego dotyczącej geometrycznego charakteru całej wiedzy matematycznej. Następnie, przedstawiam koncepcję naoczności zawartą w *The Foundations of Arithmetic*, którą porównuję z poglądami Immanuela Kanta na naturę geometrii. W części trzeciej badam związki między fregowską charakterystyką subiektywności zawartą w wyżej wymienionym dziele a obiektywną naturą geometrycznych podstaw matematyki. W zakończeniu formułuję kilka wniosków dotyczących interpretacyjnego sporu pomiędzy Dummettem a Slugą.

I. Frege o podstawach matematyki w latach 1924 – 1925.

W czerwcu 1902 roku Frege otrzymał list od Bertrand Russella, który wskazywał na sprzeczność zawartą w systemie *Grundgesetze der Arithmetik*. Sprzecznośc ta znana jest dzisiaj pod nazwą antynomii Russella. Angielski filozof sformułował początkowo swój paradoks w odniesieniu do predykatów, zaznaczając, że dotyczy on także pojęcia zbioru. Niech Z będzie zbiorem, który zawiera wszystkie takie zbiory X, które nie są własnymi elementami: $Z = \{X: X \notin X\}$. Czy Z jest swoim własnym elementem? Zarówno negatywna, jak i pozytywna odpowiedź na to pytanie prowadzi do sprzeczności: jeśli $Z \in Z$, to Z spełnia warunek definiujący zbiór Z, a więc $Z \notin Z$; jeśli $Z \notin Z$, to Z musi być elementem Z na mocy definicji tego zbioru. Predykatywna wersja paradoksu Russella nie była zagrożeniem dla systemu Fregego, ponieważ funkcja nie mogła być w nim nigdy swoim własnym argumentem – możliwość tę skutecznie wykluczało rozróżnienie na funkcje wyższego i niższego rzędu. Jednakże, antynomia w odniesieniu do zbiorów pozostawała w mocy. Ekstensje zbiorów były dla Fregego przedmiotami, a przedmioty nie były podzielone na te wyższego i niższego rzędu. W reakcji na list Russella Frege pisał, że w obliczu wskazanego paradoksu pytaniem pozostaje, jak uchwytujemy liczby, czyli pewne przedmioty logiczne (zgodnie z programem Fregowskim)? Odpowiedź zawarta w *The Basic Laws of Arithmetic* brzmiała następująco: liczby uchwytujemy jako ekstensje zbiorów (czy też szerzej przebiegi funkcji). Antynomia Russella pokazała jednak, że intuicyjne pojęcie zbioru jest wadliwe i oparty na nim fregowski system prowadzi do sprzeczności (Sluga, 1980, s. 163/163).

Frege rozważał możliwe rozwiązania przedstawionej trudności w dodatku do drugiego tomu *The Basic Laws…* oraz w nieopublikowanej pracy z 1906 roku o teorii zbiorów. Jednakże, rozpatrywane antidotum zawierało zarówno problemy natury technicznej (przy założeniu istnienia co najmniej dwóch przedmiotów sprzeczność nadal powstawała), jak i filozoficznej (powinno być wiarygodne, że zaproponowana modyfikacja ma charakter analityczny, aprioryczny i oparty na podstawach logicznych, co wydawało się mało prawdopodobne). Po roku 1906 niemiecki filozof nie rozważał już *explicite* sposobu uniknięcia antynomii Russella (Sluga, 1980, s. 169; Dummett, 1991, s. 137). Niemniej jednak, Frege w latach 1924 – 1925 (tj. ostatnich dwóch lata swojego życia) rozważał nowe podejście do matematyki. Jego uwaga skupiła się na geometrii. Immanuel Kant argumentował, że musi istnieć wiedza *a priori*, ponieważ prawa arytmetyki oraz geometrii mają charakter prawd syntetycznych *a priori*. Frege, w okresie logicyzmu[2], uznawał, że prawdy arytmetyki są nie tylko aprioryczne, ale również analityczne. Jednakże, w mniejszym lub większym stopniu[3], akceptował on poglądy Kanta na geometrię, w szczególności podtrzymywał pogląd, że prawa geometrii mają charakter syntetyczny *a priori*. Gdy analityczny charakter arytmetyki stał się wątpliwy za sprawą niespójności systemu *The Basic Laws…*, Frege prawdopodobnie uznał, że oparcie matematyki na syntetycznej *a priori* naturze prawd geometrycznych stanowi właściwy krok do podtrzymania poglądu, że wiedza ludzka ma charakter aprioryczny i nie pochodzi całkowicie z doświadczenia. Ten ostatni pogląd konstytuował w końcu

[2] Logicyzm jest to stanowisko w filozofii matematyki reprezentowane m.in. B. Russell oraz Alfreda N. Whiteheada. W wersji Fregego głosi ono, że: i) każde pojęcie arytmetyczne może być zdefiniowane w oparciu o czysto logiczne pojęcia; ii) każde twierdzenie arytmetyki może być dowiedzione na podstawie podstawowych praw logicznych oraz definicji (McFarlane, 2002, s. 25; por. Furth, 1964, s. v/vi).

[3] Przedmiotem dalszej części artykułu będzie to, w jakim stopniu poglądy Fregego na geometrię i jej naoczną bazę są zgodne z Kantowską koncepcją wiedzy matematycznej.

fundament jego całej twórczości filozoficznej i matematycznej (Sluga, 1980, s. 171).

W eseju powstałym około 1925 roku *Sources of knowledge of Mathematics and the mathematical natural Sciences*, Frege odróżnia trzy źródła wiedzy: oparte na doświadczeniu zmysłowym, logiczne oraz geometryczno-czasowe (Frege, 1979, s. 267). Doświadczenie zmysłowe upoważnia nas do wydawania sądów na temat świata, ale często prowadzi również do iluzji zmysłowych, stąd należy je uznać za niepewne i posiadające małą wiarygodność. Powstaje pytanie, w jaki sposób odróżnić poprawne postrzeżenia od jedynie złudzeń optycznych? Możemy uniknąć błędu – mówi Frege – opierając się na znanych nam prawach przyrody. Jeśli znamy pewne prawa fizyki będziemy w stanie przewidzieć, że np. światło w takich a takich okolicznościach ulegnie załamaniu i w ten sposób nie damy oszukać się naszym zmysłom. Oczywiście, aby ustrzec się błędnego koła, doświadczenie zmysłowe nie może być wyłącznym fundamentem praw przyrody. Musimy uznać – twierdzi Frege – również inne źródła poznania tychże praw: logikę i geometrię. Powinniśmy postępować krok po kroku, rozszerzając naszą wiedzę na temat fundamentalnych praw przyrody, tym samym zabezpieczając się przed błędnymi postrzeżeniami i wzmacniając podstawy, na których dalsze prawdy natury mogą być poznane. Percepcja zmysłowa jest niezbędna, ale by czynić z niej poprawny użytek musimy uznać także inne źródła poznania. Następnie, Frege dodaje, że dla matematyki doświadczenie zmysłowe nie jest konieczne – logika i geometria są w tym wypadku wystarczające (Frege, 1979, s. 268; Por. Sluga, 1979, s. 273).

W dalszej części artykułu niemiecki filozof informuje nas, że logika nie może dostarczyć wiedzy na temat przedmiotów, a przekonanie, że wyrażenia takie jak ‘ekstensja pojęcia *a*’, np. ‘ekstensja pojęcia gwiazdy’ desygnują pewien przedmiot jest oparte na błędnym zaufaniu do języka (naturalnego). Frege odżegnuje się tym samym od programu logicyzmu i przyznaje, że sam dał się zwieść logicznym defektom myśli, które doprowadziły go do uznania liczb za ekstensje pojęć (Frege, 1979, s. 269). To geometria może ‘zaopatrzyć’ nas w nieskończoną ilość przedmiotów, które są nam potrzebne, aby zdefiniować liczby. Natomiast, w oczywisty sposób, doświadczenie zmysłowe nie jest w stanie tego uczynić. Frege argumentował zarówno w *The Foundations of Arithmetic*, jak i *The Basic Laws...*, że jeśli oprzemy się wyłącznie na percepcji zmysłowej, to zdefiniowanie wielu liczb nie będzie możliwe (poczynając od zera przez jeden, a kończąc na nieskończoności) (Frege, 1960, s. 9, Frege, 1964, s. 10). Podobny pogląd podtrzymuje w ostatnim okresie swojej twórczości. Jakkolwiek wiele gwiazd byśmy zaobserwowali oraz skatalogowali ziarnek piasku, to mówiąc o pojęciu nieskończoności nie możemy odwołać się do doświadczenia zmysłowego. Aby dostarczyć matematycznych podstaw dla użycia tego terminu musimy odwołać się do geometrycznego źródła wiedzy (Frege, 1979, s. 173). Z geometrycznego źródła poznania powstają aksjomaty geometrii. Jest ono najmniej podatne na 'zarażenie' (wyżej wspomnianymi) defektami języka naturalnego. Z tegoż źródła pochodzi też nieskończoność w najściślejszym znaczeniu tego słowa, to jest takim, w którym nie oznacza ono, w przeciwieństwie do użycia potocznego, jedynie 'bardzo dużo' lub 'bardzo wiele', lecz 'nieskończenie wiele' i 'nieskończenie dużo'. Istnieje nieskończenie wiele punktów na każdym odcinku linii prostej, na każdym okręgu oraz nieskończenie wiele prostych przechodzących przez każdy punkt. To, że nie jesteśmy w stanie sobie tego wyobrazić – mówi Frege – nie ma tu nic do rzeczy. Jedna osoba jest w stanie wyobrazić sobie mniej, inna więcej. Matematyka nie jest domeną psychologii, wyobraźni, tego, co subiektywne, lecz dziedziną tego, co obiektywne i prawdziwe. W tym względzie filozofia i geometria najbardziej zbliżają się do siebie (Frege, 1979, s. 273).

We wcześniejszych pracach Fregego geometria i arytmetyka były od siebie ściśle odseparowane. Arytmetyka składała się z sądów analitycznych *a priori*. Za pomocą definicji miała być redukowalna do podstawowych praw logiki. Źródło geometrii stanowiła naoczność. Jej prawa miały charakter syntetyczny *a priori*. W ostatnim okresie swojej twórczości Frege uznał ścisły rozdział między tymi naukami za sztuczny i wprowadzający w błąd. W rzeczywistości, arytmetyka i geometria mają wspólną podstawę, która jest geometryczna w swej naturze tak, iż 'cała matematyka to właściwie geometria' (Frege, 1973, s. 241, s. 277; por. Sluga, 1980, s. 174). We wstępie do *The Foundations...* Frege odnotowywał, że liczby naturalne są używane do liczenia i na tym gruncie usiłował je zdefiniować. Gdy podjął się próby oparcia arytmetyki na geometrii uznał, że ta funkcja liczb nie jest istotna. Fakt, że liczby służą do liczenia ma jedynie znaczenie praktyczne, które jednak wprowadziło w błąd badaczy. Podobnie próba zdefiniowania najpierw liczb naturalnych, a na ich bazie liczb innego rodzaju (nierzeczywiste, wymierne, niewymierne *etc.*) okazała się nietrafiona. Frege nazywa liczby naturalne 'dziecięcymi liczbami', które traktują jedynie o wielkościach dyskretnych, stąd ich użyteczność oraz zastosowanie są ściśle ograniczone (Frege, 1979, s. 276). Liczby naturalne są wpajane dzieciom na użytek życia codziennego, lecz ich znaczenie matematyczne jest przeceniane, bowiem nie istnieje ściśle logiczne przejście od liczb naturalnych do innych rodzajów liczb[4]. Ciąg liczb naturalnych jest nieciągły, podczas gdy szereg punktów na linii prostej ma zupełnie inną strukturę: od jednej do drugiej liczby naturalnej istnieje zawsze wyraźne przejście, natomiast w szeregu punktów na prostej nie ma sensu mówić o następnym punkcie, ponieważ ma ciągły. Frege błędnie uznał, że możliwe jest wyjście od liczb naturalnych, które na drodze czysto logicznej pozwoliłoby otrzymać liczby niewymierne (Frege, 1979, s. 276).

W innym nieopublikowanym eseju z około 1925 roku zatytułowanym *An Attempt at a New Foundations of Arithmetic* Frege usiłuje zdefiniować liczby na gruncie czysto geometrycznym obierając za cel bezpośrednio liczby zespolone. Liczby zespolone muszą być zdefiniowane w pierwszym rzędzie, a liczby naturalne i rzeczywiste są charakteryzowane jako podzbiory całości liczb zespolonych. We wcześniejszych partiach artykułu niemiecki filozof podaje dwa kluczowe poglądy z *The Basic Laws...*, które uznaje wciąż za prawdziwe, mianowicie: i) arytmetyka nie musi odwoływać się do doświadczenia zmysłowego w swoich dowodach; ii) twierdzenia o liczbach zawierają twierdzenie o pojęciach. Wycofuje się jednak ze swojego poglądu, że arytmetyka nie musi odwoływać się w dowodach do naoczności, uściślając, że przez naoczność rozumie geometryczne źródło wiedzy. Ponownie identyfikuje trzy źródła poznania: doświadczenie zmysłowe, logiczne źródło wiedzy oraz geometryczne źródło wiedzy (przy czym nie mówi już o geometryczno-czasowym, lecz po prostu o geometrycznym źródle poznania) (Frege, 1979, s. 278). Logiczne źródło wiedzy jest zaangażowane zawsze, gdy dokonujemy wnioskowań,

[4] Jest to wniosek Fregego z niepowodzenia logicyzmu.

lecz nie może nam dostarczyć wiedzy o przedmiotach. Z geometrycznego źródła poznania pochodzą aksjomaty czystej geometrii, natomiast percepcja zmysłowa nie odgrywa żadnej roli w poznaniu matematycznym, tj. zarówno obiektów arytmetyki, jak i geometrii. Z doświadczenia zmysłowego oraz logiki nie jest możliwe wywnioskowanie nieskończonej ilości przedmiotów, które pojawiają się w arytmetyce. Z tego wynika, że całość poznania matematycznego wywodzi się z geometrycznego źródła poznania[5] (Frege, 1979, s. 279). U podstaw poznania matematycznego leżą pojęcia geometryczne. Jako trzy podstawowe Frege obiera punkt, linię prostą oraz trójargumentową relację, zachodzącą między dwoma punktami symetrycznymi względem siebie relatywnie do linii prostej. W ten sposób możemy zdefiniować relacją zachodzącą między dwoma liniami A i B, mającymi taki sam stosunek jak dwie inne linie C i D. Następnie, mając daną płaszczyznę o punkcie początkowym A i punkcie końcowym O możemy pokazać, że dla każdej pary prostych na tej płaszczyźnie, mających taki sam stosunek, istnieje dokładnie jeden punkt na płaszczyźnie taki, że stosunek OC do AC jest taki sam jak stosunek danej pary linii. Na płaszczyźnie posiadającej kierunek każdy taki współczynnik jest reprezentowany przez punkt C, który stanowi liczbę zespoloną. Tym samym Frege nawiązuje tu do obserwacji Carla Gaussa: każda liczba rzeczywista może być skorelowane z punktem na linii prostej, a każda liczba zespolona z punktem na płaszczyźnie (Sluga, 1980, s. 175).

II. Poglądy Fregego na aprioryczność i naoczność.

Frege w §3 *The Foundations...* stwierdza, że jego badania były motywowane, oprócz pobudek matematycznych, również kwestiami filozoficznymi, mianowicie chęcią ustalenia, jaki charakter mają prawa arytmetyki? Analityczny czy syntetyczny? Aprioryczny czy aposterioryczny? Przy czym, jak zaznacza, te rozróżnienia między naturą sądów nie dotyczy ich treści, a uzasadnienia prawdziwości sądu. Oznacza to, że gdy nazywamy pewną prawdę aposterioryczną lub analityczną nie stwierdzamy nic na temat warunków psychologicznych,

[5] Przy udziale wiedzy logicznej, bowiem myślenie nie jest możliwe bez rozumowań i wnioskowań.

fizjologicznych bądź też fizycznych, które umożliwiły utworzenie jej treści w naszej świadomości. Istotna dla charakteru sądu przez nas wydawanego jest jedynie ostateczne uzasadnienie dla tego niego, fundament, na którym opiera się jego prawdziwość lub fałszywość. Poruszamy się w ten sposób nie w sferze tego, co subiektywne, lecz w domenie tego, co obiektywne (Frege, 1960, s. 3). W przypadku prawd matematycznych problem sprowadza się do tego, żeby znaleźć dowód danego twierdzenia matematycznego i sprawdzić, czy poddaje się ono redukcji do pierwotnych i fundamentalnych praw. Frege utrzymywał bowiem, że istnieją podstawowe prawdy, które ani nie wymagają dowodu ani w istocie go nie dopuszczają. Na tej bazie definiuje on kategorie aprioryczności, aposterioryczności, analityczności i syntetyczności. Prawdy *a priori* to takie, które możemy dowieść jedynie na podstawie ogólnych, podstawowych praw, tj. takich, które ani nie wymagają dowodu ani go nie dopuszczają, oraz definicji. Taki dowód musi mieć oczywiście charakter dedukcyjny. Natomiast prawdy *a posteriori* nie mogą być uzasadnione w powyższy sposób i wymagają odwołania się do faktów, tj. sądów, które nie są ogólne, ponieważ zawierają twierdzenia o poszczególnych przedmiotach. Sądy aprioryczne dzielą się na te o naturze analitycznej oraz syntetycznej. Sądy analityczne charakteryzują się tym, że prawa na podstawie, których możemy je dowieść są ogólnym *logicznymi* zasadami. Natomiast jeśli prawa użyte w dowodzie danego sądu nie mają ogólnego *logicznego* charakteru, to jest on syntetyczny. Podsumowując, prawdy aprioryczne dają się wyprowadzić (przy udziale definicji) z ogólnych praw, tj. takich, które nie wymagają dowodu i go nie dopuszczają, bez względu na to, czy te prawdy mają charakter logiczny. Jeśli te ogólne prawa mają charakter logiczny, to tak dowiedziona prawda jest analityczna. Natomiast w przeciwnym wypadku, tj. gdy ogólna prawda nie jest logiczna, sąd jest syntetyczny. Sądy aposterioryczne nie mogą być w ogóle udowodnione na podstawie ogólnych praw, lecz w ich uzasadnieniu trzeba odwołać się do faktów doświadczenia zmysłowego (Frege, 1960, s. 4, por. Dummett, 1991, s. 131).

Filozof z Jeny w *The Foundations…* akceptował doktrynę Immanuela Kanta, że geometria euklidesowa jest prawdziwa syntetycznie *a priori*. Utrzymywał, że geometria jest oparta na czystej naoczności i to z niej wywodzi ważność swoich aksjomatów. Podczas gdy arytmetyka miała mieć nieograniczoną dziedzinę zastosowania, tj. być prawdziwa o wszystkim co da się pomyśleć, domeną obowiązywania geometrii jest to, co przestrzenne. Negacja aksjomatów geometrii nie prowadzi do sprzeczności logicznej, natomiast próba zaprzeczenia ogólnym logicznym prawom powoduje, że myśl popada w kompletny zamęt (Frege, 1960, s. 3). Aksjomaty geometrii mają charakter syntetyczny, czyli nie są redukowalne do fundamentalnych prawd logicznych. Jednak są one aprioryczne, a więc stanowią ogólne prawa, które ani nie wymagają ani nie dopuszczają dowodu. Ich prawdziwość nie wymaga odwołania do zasad, które nie mają charakteru ogólnego i zawierają twierdzenia o określonych przedmiotach (Burge, 2005, s. 376.).

Frege w przypisie do jednego z fragmentów §3 *The Foundations…* twierdzi, że wprowadzając rozróżnienie na sądy aprioryczne/aposterioryczne oraz analityczne/syntetyczne nie chce nadawać nowego sensu tym terminom, ale eksplikuje jedynie to, co inni autorzy – a w szczególności Kant – mieli na myśli (Frege, 1960, s. 3). W §13 opisuje kantowskie rozumienie naoczności i w następnym paragrafie opowiada się za nim jako źródłem wiedzy geometrycznej. Jednakże, Kant uważał, że naoczność jest zdolnością do jednostkowej i bezpośredniej reprezentacji przedmiotów (Kant, 2010a, s. 31). Umożliwia ona przedstawianie jednostkowych elementów czasu oraz przestrzeni (lub w czasie i przestrzeni) bez zapośredniczania ich za pomocą pojęć (Kant, 2010, s. 73). Co więcej, Kant odróżniał formę zmysłowości od jej treści, tj. odróżniał czystą naoczność, która może być dana *a priori* od treści reprezentacji, które są dzięki niej dane, czyli naoczności empirycznej. W czystej naoczności oglądamy samą formę zmysłowości, formę nieempirycznego oglądania wyprzedzającą to, że dany jest nam jakiś przedmiot. Przestrzeń oraz czas stanowią formy zmysłowości, które umożliwiają nam ustrukturyzowanie wrażeń zmysłowych zanim jeszcze jakiekolwiek dane zmysłowe pojawią się w naszym doświadczeniu.

Skutek oddziaływania przedmiotu na zdolność wyobrażania sobie, w tych granicach, w jakich jesteśmy przezeń pobudzani, jest wrażeniem. Oglądanie odnoszące się do przedmiotów poprzez wrażenie nazywa się empirycznym (Kant, 2010a, s. 73).

Czystym (w rozumieniu transcendentalnym) nazywam wszelkie przedstawienie, w którym nie znajduje się nic, co by było wrażeniem. Natrafimy przeto *a priori* w umyśle na czystą formę zmysłowych treści naocznych w ogóle, w której oglądamy w pewnych stosunkach to, co różnorodne w zjawiskach. Ta czysta forma zmysłowości nazywa się także samą czystą naocznością (*reine Anschauung*) (Kant, 2010a, s. 74).

Matematyka polega na operowaniu na tej czystej strukturze form zmysłowości w odwołaniu do apriorycznego ustrukturyzowaniu czasu i przestrzeni. Kant uznawał, że czysta, nieempiryczna naoczność dostarcza nam jednostkowych i określonych przedmiotów takich jak np. trójkąt. Jednakże, matematyczne poznanie jest poznaniem opartym na konstrukcji pojęć, a pojęcie (w przeciwieństwie do danych naocznych) jest czymś ogólnym. Skonstruowanie pojęcia – wyjaśnia Kant – polega na przedstawieniu odpowiadającej mu naoczności *a priori*. Pojęcie jako coś ogólnego musi mieć ważność dla wszystkich możliwych danych naocznych, które podpadają pod to pojęcie, a nie jedynie dla konkretnego przedstawionego sobie przez nas w naoczności, powiedzmy, trójkąta. W poznawaniu więc tegoż konkretnego przedmiotu (trójkąta) odpowiadającemu określonemu pojęciu (pojęciu trójkąta) abstrahujemy od pewnych cech tegoż przedmiotu tak, aby nasze przedstawienie naoczne zachowało powszechną ważność wyrażoną w ogólności pojęcia (Kant, 2010b, s. 336).

Konstruuję więc trójkąt, przedstawiając przedmiot odpowiadający temu pojęciu albo za pomocą samej tylko wyobraźni w naoczności czystej, albo wedle niej także na papierze w naoczności empirycznej, ale w obu wypadkach całkowicie *a priori*, nie zapożyczywszy na to wzoru z żadnego doświadczenia. Każda wyrysowana figura indywidualna jest empiryczna, a mimo to służy do wyrażania pojęcia bez szkody dla jego ogólności, ponieważ przy tej empirycznej naoczności zważa się zawsze tylko na czynność konstruowania pojęcia, dla którego zupełnie obojętnych jest wiele określeń [danej figury], np. wielkości boków i kątów, i wobec tego abstrahuje się od tych różnic, które nie zmieniają pojęcia trójkąta (Kant, 2010b, s. 337).

Zdaniem Kanta, poznanie matematyczne opiera się na niezapośredniczonym dostępie do jednostkowych przedmiotów. Geometria posiada określony zasób obiektów, które nie są przygodne i empiryczne. Przedmioty te stanowią fundament konstrukcji jasnych i jednoznacznych pojęć matematycznych. Są to dane nam w czystej naoczności linie, płaszczyzny, trójkąty *et cetera.* Rolą form zmysłowości w matematyce jest dostarczanie nam naoczności, dzięki którym w oparciu o proces abstrakcji wydobywamy z nich to, co ogólne i powszechnie ważne. Naoczność ma charakter obiektywny i jest ugruntowana w strukturze podmiotu transcendentalnego. Jaką rolę pełni zmysłowość według Fregego w poznaniu prawd geometrii? Jak wskazywałem powyżej, Frege uznawał, że aksjomaty i prawa geometrii są aprioryczne. Uznawał więc, że stanowią one lub wywodzą się z ogólnych prawd, które nie dopuszczają i nie wymagają dowodu. Dowody praw geometrii nie mogą zawierać odniesienia do niedowodliwych twierdzeń, które nie są ogólne i mówią o określonych przedmiotach. Wskazywałem również, że Frege powoływał się na stanowisko kantowskie dotyczące poznania geometrycznego. Ponadto, cytuje on w §12 fragment z *Krytyki Czystego Rozumu* mówiący o jednostkowym i bezpośrednim charakterze obiektów danych w naoczności (Frege, 1960, s. 19). Czy rola jednostkowych przedmiotów dostarczanych w naoczności nie stoi w sprzeczności z ogólnym charakterem prawd *a priori*? Czy odgrywają one jakąkolwiek rolę w uzasadnianiu aksjomatów i praw geometrii?

Tyler Burge wskazuje, że Frege był świadom przedstawionych trudności i próbował na nie odpowiedzieć już w §13 *Grundlagen der Arithmetik*, czego rezultatem – zdaniem Burge'a – była próba umniejszenia roli określonych przedmiotów naoczności i jednostkowości treści jej sądów w wyprowadzaniu ogólnych praw geometrii (Burge, 2005, s. 376/377). We wspomnianym paragrafie Frege wskazuje, że geometryczny punkt (linia/płaszczyzna) rozważany sam przez się nie może być odróżniony od innego punktu (linii/płaszczyzny). Jedynie wtedy, gdy wiele takich obiektów jest przedstawianych w naoczności jesteśmy w stanie je odróżnić. Autor *Sensu i znaczenia* wyciąga z tego wniosek dwojaki. Z jednej strony stwierdza, że jest tym samym zrozumiałe, iż ogólne prawdy geometrii pochodzą z naoczności. Z drugiej strony twierdzi, że punktu, płaszczyzny i linie dane nam w naoczności nie są w ogóle określone! Ten drugi fakt ma umożliwiać, iż obiekty poznawane w ten sposób reprezentują cały rodzaj, a nie konkretne poznawane obiekty (co zapewne ma umożliwiać konstrukcję pojęć w sensie kantowskim). Przedmioty geometrii kontrastuje z liczbami, które w jego opinii niewątpliwie były przedmiotami jednostkowymi (choć nie danymi bezpośrednio), posiadającymi swoje niepowtarzalne cechy (Frege, 1960, 20; por. Frege, 1960, s. xiv). Wskazuje to, że Frege mógł uważać, iż wkład danych czystej naoczności do uzasadnienia ogólnych prawd geometrii polega nie na dostarczaniu jednostkowych przedmiotów, ale na reprezentacji pewnych ich aspektów, które nie są szczególne dla tych obiektów. W takim wypadku choć w oglądzie zmysłowości musiałyby być nam przedstawiane poszczególne przedmioty, to moc uzasadniająca naoczności opierałaby się jedynie na geometrycznych własnościach, które są niezmienne względem przekształceń w systemie Euklidesa (Burge, 1960, s. 377). Te aspekty matematycznych przedmiotów fundowałyby ogólne prawdy oraz aksjomaty geometrii. Tłumaczyłoby to powód, dla którego dane naoczności nie muszą stanowić określonych, poszczególnych przedmiotów, lecz reprezentuję pewien typ czy rodzaj jako całość. Obiekty naoczności egzemplikowałyby własności, które są wspólne z podobnymi pod istotnymi cechami przedstawieniami (trójkątami, płaszczyznami *etc.*), a z kolei własności te byłyby jedynym istotnym aspektem zmysłowości dla ufundowania ogólnych praw i aksjomatów geometrii (Burge, 1960, s. 377).

W paragrafie 26 The Foundations pojawia się podział na to, co obiektywne i te, co subiektywne, który może okazać się kluczem dla zrozumienia tego wątku w myśli Fregego. Autor *Sensu i znaczenia* stwierdza tam, że wg Kanta przestrzeń należy do zjawiska. Następnie zauważa, iż przestrzeń może dla innych istot racjonalnych niż ludzie przedstawiać się inaczej. Co więcej, nie możemy nawet wiedzieć, czy jawi się ona w ten sam sposób dwóm różnym osobom, ponieważ nie możemy ustawić obok siebie ich przedstawień przestrzeni i porównać je ze sobą. Zatem to, co jest czysto naoczne nie jest komunikowalne i tym samym jest czymś subiektywnym. Co stanowi element obiektywny w formie zmysłowości jaką jest przestrzeń? Każdy człowiek uznaje te same aksjomaty geometrii, nawet jeśli w sposób implicytny, za pomocą swojego zachowania, i musi je uznawać o ile ma funkcjonować w świecie. Obiektywne – mówi Frege – jest to, co podlega prawom; to, co może być pojmowane i poddawane sądom, to, co jest komunikowalne (wyrażalne w słowach) (Frege, 1960, s. 35). Jednakże, Kant, choć nazywał wszelkie przedmioty, które są nam dane zjawiskiem (w przeciwstawieniu do rzeczy samych w sobie), to uznawał (czystą) naoczność za formę obiektywnego oglądania przedmiotów w odróżnieniu od subiektywności wrażeń (zmysłowych) (Kant, 2010b, s. 31). Z transcendentalnego punktu widzenia – zdaniem Kanta – przestrzeń i tym samym czysta aprioryczna naoczność są formą naszej podmiotowej konstytucji. W ten sposób przestrzeń jako forma naszej zmysłowości stanowi konieczny warunek wszelkiego doświadczenia. Przedstawia ona ważność dla wszystkich możliwych przedstawień i konstytuuje obiektywność geometrii. W czystej naoczności możemy oglądać samą tę formę zmysłowości i konstruować obiektywnie ważne dla naszego poznania pojęcia geometryczne (Kant, 2010a, s. 97). Tylko jeśli przestrzeń uznamy za podmiotowy warunek formy przedstawień, to będziemy w stanie wyjaśnić obowiązywania prawd *a priori* w geometrii oraz obiektywność czystej naoczności. Z empirycznego punktu widzenia – punktu widzenia praktyki naukowej i matematycznej – czysta naoczność, prawa geometrii i sama przestrzeń są obiektywne oraz w żaden sposób nie są ograniczone do ludzkiej podmiotowości (Kant, 2010a, s. 96; por. Burge, 2005, s. 383). Zatem zdaniem Kanta dwoje ludzi nie może różnić się co do czystych naoczności, natomiast w opinii Fregego jest to możliwe. Wydaje się, że autor *Przedmiotu i pojęcia* uznawał zmysłowość za tak samo subiektywną jak wrażenia zmysłowe. Wskazuje na to przykład, którym starał się zobrazować przytaczane powyżej przeze mnie rozważania na temat obiektywności i subiektywności oraz następujące po nim porównanie zmysłowości do postrzegania kolorów, tj. pewnych wrażeń zmysłowych. Mianowicie, Frege wskazuje, że możemy wyobrazić sobie dwie istoty racjonalne, które w naoczności postrzegają pewne własności i relacje takie jak położenie trzech punktów na linii prostej i czterech punktów na płaszczyźnie. Przypuśćmy, że to, co jedna z tych osób przedstawia sobie jako płaszczyznę, drugiej z nich jawi się jako punkt. W tym przypadku to, co dla jednego z tych podmiotów wydaje się być linią łączącą dwa punkty, dla drugiego jest przecięciem się dwóch płaszczyzn. Mimo tych rozbieżności – mówi Frege – te dwie istoty nie miałyby problemu z wzajemnym porozumieniem się i nigdy nie uświadomiłyby sobie rozbieżności między tym, co dane im w naoczności, ponieważ w geometrii rzutowej każde twierdzenie o przecięciu płaszczyzn posiadałoby swój odpowiednik w sądzie na temat linii łączącej dwa punkty. Podmioty te zgadzałyby się co do wszystkich praw geometrii, jedynie inaczej interpretując występujące w nich terminy za pomocą swoich naoczności, np. z pojęciem punktu wiążąc swoiste dla swojej zmysłowości przedstawienia. Słowo 'punkt' ma więc obiektywne znaczenie, o ile nie wiążemy z tym znaczeniem jakichkolwiek cech szczególnych naszej partykularnej naoczności (Frege, 1960, s. 35/36).

Podobnie jest z terminem 'biały'. 'Biały' wydaje się oznaczać pewne subiektywne wrażenie, ale nawet w mowie potocznej słowo to posiada w rzeczywistości obiektywny sens. Kiedy mówimy, że coś jest białe wyrażamy obiektywny stan rzeczy, który rozpoznajemy w standardowym oświetleniu za pomocą pewnego wrażenia zmysłowego. Jeśli warunki są niestandardowe i dlatego określony obiekt postrzegamy nietypowo uwzględniamy to w naszym sądzie mówiąc, np. 'śnieg wydaje się w tej chwili czerwony, ale jest biały'. Nawet osoba niewidoma może uchwycić tę obiektywną własność posiadaną przez przedmioty, chociaż nie może jej poznać we własnych wrażeniach, ale może to uczynić np. za pomocą eksperymentu fizycznego. Zatem terminy odnoszące się do kolorów – mówi Frege – nie oznaczają naszych subiektywnych wrażeń, co do których nie możemy dojść do pełnego porozumienia, lecz pewne obiektywne stany i własności. Jako obiektywne – kontynuuje – uznaję to, co jest niezależne od naszych wrażeń, naoczności, wyobrażeń oraz od wszelkich mentalnych obrazów powstałych na bazie naszych przeszłych postrzeżeń (Frege, 1960, s. 36)

Zdaniem Fregego, ze słowami takim jak 'punkt' czy 'biały' wiążemy pewne naoczności lub wrażenia, lecz znaczenia słów są od nich niezależne, ponieważ nie możemy naszych przedstawień przekazać innym. Każdy podmiot może z danym słowem łączyć inne wrażenia/naoczności i nigdy nie będziemy w stanie tego stwierdzić, więc mają one charakter subiektywny i niekomunikowalny. Żeby poprawnie komunikować się nasze pojęcia muszą mieć znaczenia obiektywne i niezależne od naszych przedstawień. Porozumienie zachodzi wtedy, gdy zgadzamy się jak oceniać prawdziwość sądów zawierających te terminy. Słowa takie jak 'biały' oraz 'punkt' posiadają obiektywny sens, gdy są używane, aby wyrazić obiektywne fakty, co do których wszyscy się zgadzamy, w jaki sposób ocenić ich prawdziwość bądź fałszywość. Według Fregego przestrzeń jest obiektywna o tyle, o ile możemy stwierdzić jej własności za pomocą sądów posiadających sens niezależny od subiektywnych czynników. Aksjomaty geometrii stwierdzają właśnie te obiektywne własności geometryczne. Każdy musi uznać prawdy *a priori* dotyczące przestrzeni, chociażby jedynie poprzez swoje zachowanie. W ten sposób akceptuje on to, co matematycznie obiektywne i co może być uchwycone przez myśl niezależnie od naoczności i wrażeń (Dummett, 1991, s. 154)[6].

III. Subiektywność naoczności a obiektywność geometrycznych podstaw matematyki.

Frege uznawał, że to, co dane w naoczności oraz we wrażeniach zmysłowych stanowi element subiektywny w poznaniu matematycznym i nie może stanowić obiektywnego czynnika w poznaniu apriorycznym. Aksjomaty i prawa geometrii są powszechnie ważne, ponieważ wyrażają obiektywne własności przestrzenne niezależne od naszej podmiotowej konstrukcji. Jak wskazywałem w pierwszej części artykułu, niemiecki filozof skonfrontowany z antynomią Russella w swoim ostatnim okresie twórczości postanowił porzucić pogląd, że arytmetyka jest redukowalna do logiki (plus definicji). Przedsięwziął on projekt ufundowania całej matematyki na geometrycznym źródle wiedzy. Jednak, jeśli naoczność ma charakter czysto subiektywny ten sam status, wydawałoby się, posiada również geometryczne źródło poznania. Stawia to pod pewnym znakiem zapytania ciągłość myśli autora *Sensu i znaczenia* w odniesieniu do poglądów na geometrię. W jaki sposób liczby zespolone mogą być wyprowadzone z naszej wiedzy o płaszczyznach, liniach i punktach, która opiera się na subiektywnej zdolności jaką jest naoczność? Frege we wpisie z września 1924 roku zatytułowanym *Number* stwierdza, że przez liczby musimy rozumieć przedmioty, które nie mogą być postrzegane poprzez zmysły. Dodaje, że nawet obiekty geometrii –

---

[6] Frege zalicza czystą naoczność do subiektywnych zdolności ludzkich, natomiast Kant twierdzi, że jest ona obiektywną władzą podmiotu transcendentalnego. Czy pomimo tych różnic ich stanowiska nie są zgodne w odniesieniu do geometrii? Marcin Poręba, znany polski badacz myśli Kantowskiej, zdaje się wskazywać, że odpowiedź na tak postawione pytanie może nie mieć dobrze określonego sensu. Po pierwsze, w czasach Kanta nie istniało coś takiego jak filozofia matematyki w dzisiejszym rozumieniu. Po drugie, matematyka nie stanowiła oddzielnego obiektu namysłu dla filozofa z Królewca. Wyżej zadane pytanie może zakładać więc pewnego typu anachronizm. Po trzecie, Kant nie określa, czym są przedmioty matematyki. W żadnym razie – zdaniem Poręby – nie są one konstrukcjami w naoczności. W czystej naoczności konstruujemy *jedynie* ‘reprezentacje przedmiotów matematyki, w pewien sposób egzemplifikującymi, modelującymi własności tych przedmiotów, zwłaszcza ich własności strukturalne’ (Poręba, 2017, s. 238; Poręba, 2017, s. 228).

punkty, płaszczyzny, linie proste, powierzchnie – również nie da się zaobserwować za pomocą percepcji (Frege, 1979, s. 266). Jak już wspominałem, w nieopublikowanym artykule *A new Attempt at a Foundation for Arithmetic* niemiecki filozof przyznaje, iż musi porzucić pogląd, że arytmetyka nie musi odwoływać się do naoczności w swoich dowodach. Zaznacza, że przez naoczność rozumie geometryczne źródło poznania, z którego pochodzą aksjomaty geometrii[7]. Jednocześnie, podtrzymuje swój pogląd, że za pomocą doświadczenia zmysłowego nie możemy zdobyć wiedzy na temat nieskończoności i nie odgrywa ona żadnej roli w arytmetyce (Frege, 1979, s. 279). Oddzielenie roli wrażeń zmysłowych i naoczności w poznaniu liczb jest więc dość ścisłe. Kluczowy – wydaje się – jest jednak wzmiankowany przeze mnie fragment pochodzący z eseju *Sources of knowledge of Mathematics and the mathematical natural Sciences*, w którym Frege przywołuje podział na to, co obiektywne i to, co subiektywne. Autor *Grundlagen* mówi tam (po raz kolejny), że źródłem nieskończoności jest geometryczne źródło poznania. Na każdym odcinku linii prostej oraz okręgu znajduje się nieskończenie wiele punktów. Przez każdy punkt przechodzi nieskończenie wiele linii prostych. Czy możemy sobie wyobrazić wszystkie te punkty w jednym momencie? Nie – odpowiada Frege - ale jest to bez znaczenia, ponieważ relewantna jest domena tego, co obiektywne, a nie tego, co subiektywne. Jedna osoba może wyobrazić sobie mniej, inna więcej, lecz należy to do dziedziny psychologii, wyobraźni, a nie domeny prawdy (Frege, 1979, s. 273). W tym momencie należy zauważyć, że takie obiekty geometryczne jak punkty i płaszczyzny zgodnie z wcześniejszymi poglądami Fregego miały być dane w czystej naoczności (podobnie jak u Kanta). Co więcej, stanowisko to zdaje się on podtrzymywać, gdy wspomina, iż naoczność stanowi źródło (czystej) geometrii i jej aksjomatów (Frege, 1979, s. 278/279). Wskazuje to, że niezależnie od tego, czym jest owa zdolność, umożliwiająca nam przedstawianie sobie tych przedmiotów, ma ona charakter subiektywny. Jest to jednak ten sam sens słowa 'subiektywny', którym Frege posługiwał się w *The Foundation…*. Nasze indywidualne zdolności imaginacyjno-naocznościowe nie są gwarantem powszechnej ważności prawd geometrii. Aprioryczne sądy przestrzenne są obiektywnie prawdziwe, ponieważ wyrażają geometryczne własności,

[7] W tym samym artykule posługuje się kantowskim terminem 'czystej geometrii'.

które nie zawierają w sobie czynników subiektywnych. Co oznacza więc redukowalność całej matematyki, a w szczególności liczb do czystej geometrii? Geometria składa się z prawd syntetycznych a *priori*. Sąd jest aprioryczny wtedy, gdy jest ogólnym prawem, które ani nie wymaga ani nie dopuszcza dowodu. Oznacza to, że prawdy arytmetyki muszą dać się udowodnić jedynie na podstawie definicji i ogólnych prawd geometrii. Jak widzieliśmy, aby tego dowieść Frege obiera jako podstawowe trzy pojęcia z zakresu geometrii (punkt, linię prostą i trzy argumentową relację, zachodzącą między dwoma punktami symetrycznymi względem siebie relatywnie do linii prostej) i na drodze logicznie poprawnych wnioskowań definiuje kolejne pojęcia i relacje geometryczne tak, aby za ich pomocą zdefiniować liczby zespolone. W sposób dedukcyjny przechodzi on od podstawowych praw geometrii i definicji terminów w nich występujących do liczb zespolonych. Powszechna ważność uzyskana na tej drodze pochodzi z obiektywności aksjomatów, twierdzeń oraz definicji geometrycznych.

Zakończenie

Według Hansa Slugi, cała twórczość Fregego wpisuje się w tradycję idealizmu Kanta i Hermanna Loztego (Sluga, 1977, s. 235). Jest to opinia wysoce nieortodoksyjna. Jedną z jej motywacji stanowi fregowska doktryna o syntetycznej *a priori* naturze geometrii, która nosi oczywiste podobieństwo do stanowiska Kanta i stawia pod znakiem zapytania realistyczny charakter przedmiotów poznania. Sluga twierdzi bowiem, że filozof z Jeny zarówno czas, jak i przestrzeń uznawał za aprioryczne formy zmysłowości, stąd obiekty naszego codziennego doświadczenia są jedynie fenomenami konstytuowanymi przez strukturę podmiotu transcendentalnego (Sluga, 1977, s. 236). Jak wspominałem we wstępie, zdecydowanym krytykiem tej interpretacji jest Michael Dummett, który opowiada się za bardziej tradycyjnym odczytaniem filozofii Fregego – wykładnią realistyczną, platońską i antyidealistyczną. Ograniczę się tu do kilku uwag związanych bezpośrednio z ustaleniami poczynionymi w niniejszym artykule. Po pierwsze, należy przyznać rację Dummettowi, że trudno doszukać się w twórczości Fregego transcendentalnej dedukcji form zmysłowości oraz kategorii intelektu, które stanowią fundament idealizmu Kanta. Z tego względu, uznanie przez autora *Sensu i znaczenia* syntetycznej *a priori* natury wiedzy geometrycznej nie stanowi wystarczającego dowodu na akceptację pozostałych założeń filozoficznych doktryny Kantowskiej (Dummett, 1991, s. 138). Po drugie, między poglądami Fregego a Kanta na matematykę istnieją dwie dość oczywiste różnice. Jakkolwiek filozof z Jeny uznaje czystą naoczność w pewien sposób za niezbędną dla naszej wiedzy geometrycznej, to nie wspomina, aby za pomocą tej zdolności dokonywaliśmy konstrukcji specyficznych dla niej przedmiotów. Co więcej, Frege, poza opisywanym przeze mnie końcowym okresem swojej twórczości, nie uważał, żeby czysta naoczność (czasu) odgrywała jakąkolwiek rolę w arytmetyce. Arytmetyka miała być częścią logiki, a jej twierdzenia całkowicie niezależne od pozalogicznych źródeł wiedzy (form zmysłowości). Stoi to w wyraźnej sprzeczności z poglądami Kanta. Czy wyżej wspomniane racje przekonująco dowodzą błędności stanowiska interpretacyjnego Slugi w sporze z Dummettem? W mojej opinii odpowiedź jest zdecydowanie negatywna. Racja po temu jest następująca. Koncepcja Fregego – z lat 1924 - 1925 – głosząca, że całość naszej wiedzy matematycznej pochodzi z geometrycznego źródła wiedzy, które jest tożsame z czystą naocznością, wskazuje na ciągłość jego motywacji filozoficznych, które w żadnym wypadku nie stoją w sprzeczności z idealizmem niemieckim, a w dużej mierze pokrywają się. Niemiecki filozof w swoich poglądach na podstawy matematyki nieustannie utrzymywał, że nasza wiedza nie ma pochodzenia wyłącznie empirycznego oraz że istnieją prawdy aprioryczne odkrywane tylko za pomocą rozumu. Program logicyzmu oraz geometryczne ufundowanie wiedzy matematycznej wydają się tylko dwoma drogami do tego samego celu: wykazania, iż stanowiska naturalistyczne w matematyce są błędne, bowiem ani badanie umysłu ludzkiego, ani doświadczenie zmysłowe nie odgrywają żadnej istotnej roli w poznaniu matematycznym. Stąd możemy powiedzieć, że Frege podzielał (neo)kantowskie i antynaturalistyczne motywacje stojące za uznaniem sfery wiedzy apriorycznej odkrywanej wyłącznie za pomocą rozumu.

BIBLIOGRAFIA

Burge, T. (2005). *Truth, Thought, Reason: Essays on Frege*, New York: Oxford University Press.

Dummett, M. (1991). *Frege and Other Philosophers*, New York: Clarendon Press.

Dummett, M. (1993). *Frege: Philosophy of Language*. Second Edition, Cambridge: Harvard University Press.

Furth, M. (1964). Editor's Introduction, W: Frege, G., *The Basic Laws of Arithmetic: Exposition of the System*, tłum. Montgomery Furth. Berkeley: University of California Press.

Frege, G. (1960). *The Foundations of Arithmetic: A logico-mathematical enquiry into the*

concept of number, tłum. J. L. Austin, Oxford: Blackwell.

Frege, G., (1964). *The Basic Laws of Arithmetic: Exposition of the System*, tłum. Montgomery Furth. Berkeley: University of California Press.

Frege, G., (1973). *Schriften zur Logik. Aus dem Nachlaß*, Berlin: Akademie-Verlag.

Frege, G., (1979). *Posthumous Writings*. tłum. Peter Long and Roger White, Chicago: University of Chicago Press.

Kant, I. (2010a). *Krytyka Czystego Rozumu*, t. I, tłum. R. Ingarden, Warszawa: WN PWN.

Kant, I. (2010b). *Krytyka Czystego Rozumu*, t. II, tłum. R. Ingarden, Warszawa: WN PWN.

MacFarlane, J. (2002). Frege, Kant, and the Logic in Logicism, *Philosophical Review*, 111/1: 25–66.

Poręba, M. (2017). Kant a Konstruktywizm, W: Poręba, M., *Wolność i Metafizyka. Eseje z Filozofii Pierwszej* (228 – 241), Warszawa: PWN.

Sluga, H. (1977). Frege's Alleged Realism, *Inquiry*, 20 (1-4), 227 – 242.

Sluga, H. (1980). *Gottlob Frege*, London: Routledge & Kegan Paul.

ABSTRACT

'Mathematics in its entirety is really geometry'. Gottlob Frege's view of the foundations of mathematics after the fall of logicist program

Gottlob Frege abandoned his logicist program after Bertrand Russell had discovered that some assumptions of Frege's system lead to contradiction (so called Russell's paradox). Nevertheless, he proposed a new attempt for the foundations of mathematics in two last years of his life. According to this new program, the whole of mathematics is based on the geometrical source of knowledge. By the geometrical source of cognition Frege meant intuition which is the source of an infinite number of objects in arithmetic. In this article, I describe this final attempt of Frege to provide the foundations of mathematics. Furthermore, I compare Frege's views of intuition from *The Foundations of Arithmetic* (and his later views) with the Kantian conception of pure intuition as the source of geometrical axioms. In the conclusion of the essay, I examine some implications for the debate between Hans Sluga and Michael Dummett concerning the realistic and idealistic interpretations of Frege's philosophy.

KEYWORDS: Frege, The Foundations of Mathematics, Geometry, Kant.

SŁOWA KLUCZOWE: Frege, Podstawy Matematyki, Geometria, Kant.