



**Piotr Szczepocki**

Uniwersytet Łódzki, Wydział Ekonomiczno-Socjologiczny, Katedra Metod Statystycznych,  
[piotr.szczepocki@uni.lodz.pl](mailto:piotr.szczepocki@uni.lodz.pl)

## Zastosowanie filtru Kalmana do modeli stochastycznej zmienności typu Ornsteina-Uhlenbecka

**Streszczenie:** O.E. Barndorff-Nielsen i N. Shephard (2001) zaproponowali klasę modeli stochastycznej zmienności typu Ornsteina-Uhlenbecka, opartych na procesie Lévy'ego bez składnika Gaussowskiego. Estymacja parametrów modeli tego typu jest trudna, ponieważ nie można wyznaczyć odpowiedniej funkcji wiarygodności w postaci jawnego wzoru. W artykule zaprezentowana zostanie propozycja zastosowania filtru Kalmana do wyznaczania estymatorów parametrów w przypadku złożenia kilku procesów zmienności. Podejście to zostanie wykorzystane do modelowania kursu EUR/PLN. Empiryczny przykład uzupełnia eksperyment symulacyjny mający na celu zbadanie własności tak otrzymanych estymatorów.

**Słowa kluczowe:** stochastyczne modele zmienności, proces Lévy'ego

**JEL:** C58

# 1. Wprowadzenie

Obserwując szeregi czasowe różnych zjawisk finansowych, można zauważyć wiele wspólnych własności nazywanych stylizowanymi faktami empirycznymi (Cont, Tankov, 2004: 218–220). Do najważniejszych stylizowanych faktów na temat rozkładu stóp zwrotu można zaliczyć: grube ogony rozkładu, skoki wartości, szybko malejącą autokorelację stóp zwrotu, asymetrię wzrost/spadek (nagłe spadki stóp zwrotu są zazwyczaj dużo większe niż wzrosty), grupowanie zmienności, normalność agregacyjną (wraz ze wzrostem odstępu czasu między obserwacjami rozkłady stóp zwrotu coraz bardziej przypominają rozkład normalny).

Do objaśnienia tych własności powstały m.in. dwie klasy modeli statystycznych: modele autoregresji z heteroskedastycznością warunkową (ARCH) i ich uogólnień oraz modele stochastycznej zmienności (SV), w których zmienność procesu stochastycznego jest także procesem stochastycznym. O. E. Barndorff-Nielsen i N. Shephard (2001) zaproponowali rodzinę modeli stochastycznej zmienności opartych na niegaussowskim procesie Ornsteina-Uhlenbecka (OU type Stochastic Volatility Model, w skrócie OUSV) następującej postaci:

$$\begin{cases} dY(t) = \mu dt + \sqrt{X_t} dW(t) \\ dX(t) = -\lambda X(t) dt + dL(\lambda t) \end{cases} \quad (1)$$

gdzie  $(Y(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$  to proces logarytmicznych cen,  $(W(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$  jest procesem Wienera niezależnym od  $(X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ ,  $(L(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$  jest niemalejącym procesem Lévy'ego. Wówczas:

$$X(t) = e^{-\lambda(t-s)} X(s) + \int_s^t e^{-\lambda(t-s)} dL(\lambda s), \quad (2)$$

dla  $s, t \in \mathbb{R}_+$ ,  $s > t$ . Proces Ornsteina-Uhlenbecka  $(X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$  jest dodatni, nie zawiera części Gaussowskiej tylko dryf i część czysto skokową. Oznacza to, że proces  $(X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$  porusza się do góry wyłącznie skokami, natomiast między skokami maleje wykładniczo, ze stopą persystencji  $\lambda$  (por. rys. 1). Takie zachowanie dobrze modeluje rzeczywistą zmienność cen aktywów: pojawienie się nowych informacji powoduje nagły skokowy wzrost zmienności, po którym następuje spadek zmienności (Barndorff-Nielsen, Shephard, 2001).

Model (1) można uogólnić do złożenia (*superposition*) kilku procesów zmienności (Barndorff-Nielsen, Shephard, 2001):

$$X(t) = \sum_{j=1}^p v_j X_j(t), \tag{3}$$

gdzie  $\sum_{j=1}^p v_j = 1$  oraz  $v_j \geq 0$ , dla  $j = 1, \dots, p$ . Jako wagi przyjmuje się:  $v_i = \omega_i^2 / \sum_{i=1}^p \omega_i^2$ ,

czyli względny udział wariancji każdego z procesów zmienności. Każdy z procesów zmienności opisuje stochastyczne równanie różniczkowe postaci:

$$dX_j(t) = -\lambda_j X_j(t) dt + dL_j(\lambda_j t), \tag{4}$$

gdzie  $(L_j(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$  są niezależnymi, ale niekoniecznie identycznymi procesami Lévy'ego. W rezultacie uzyskujemy model stochastycznej zmienności postaci:

$$\left\{ \begin{array}{l} dY(t) = \mu dt + \sqrt{X_t} dW(t) \\ X(t) = \sum_{i=1}^p v_i X_i(t) \\ dX_1(t) = -\lambda_1 X_1(t) dt + dL_1(\lambda_1 t) \\ \vdots \\ dX_p(t) = -\lambda_p X_p(t) dt + dL_p(\lambda_p t) \end{array} \right. \tag{5}$$

Za koniecznością wprowadzenia dwóch lub większej liczby procesów zmienności przemawia fakt, że w przypadku stóp zwrotu często obserwowane są krótkie skoki zmienności (typowa codzienna zmienność) oraz rzadsze duże skoki, które są spowodowane pojawieniem się nowych, istotnych informacji (Griffin, Steel, 2006). Ponadto złożenie kilku procesów zmienności pozwala na uzyskanie w modelu funkcji autokorelacji kwadratów stóp zwrotów bardziej zbliżonej do obserwowanych empirycznie (Barndorff-Nielsen, Shephard, 2001).

Estymacja modelu OUSV jest trudna, ponieważ nie jest znana postać funkcji przejścia procesu  $(Y_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ . O.E. Barndorff-Nielsen i N. Shephard (2001) proponowali użycie podejścia Bayesowskiego (Markowowskie metody Monte Carlo, Markov Chain Monte Carlo), estymacji pośredniej (Gourieroux, Monfort, Renault, 1993), filtrów Kalmana i cząsteczkowych (sekwencyjna metoda Monte Carlo, zob. Pitt, Shephard, 1999) oraz funkcji estymujących (Bibby, Sørensen, 1995). W dalszych pracach dotyczących estymacji modelu OUSV najwięcej uwagi poświęcono metodzie MCMC (Roberts, Papaspiliopoulos, Dellaportas, 2004; Gander,

Stephens, 2007a; 2007b; Griffin, Steel, 2006; 2010). Ponadto wykorzystano tak różnorodne podejścia, jak: empiryczne funkcje charakterystyczne (Taufe, Leonenko, Bee, 2011), martyngałowe funkcje estymujące (Hubalek, Posedel, 2011) czy Particle Markov Chain Monte Carlo (Andrieu, Doucet, Holenstein, 2010). Złożenie procesów zmienności postaci (5) zostało uwzględnione m.in. w pracach J. E. Griffina i M. F. J. Steela (2006; 2010) oraz E. Taufera, N. Leonenki, M. Bee (2011). Rozwijane jest także podejście wielowymiarowe (Pigorsch, Stelzer, 2009; Barndorff-Nielsen, Stelzer, 2013; Stelzer, Tosstorff, Wittlinger, 2015).

Celem artykułu jest zaproponowanie specyfikacji filtra Kalmana dla uogólnienia modelu Barndorff-Nielsen i Shepharda na złożenie kilku procesów. Do tej pory użycie filtra Kalmana było ograniczone tylko do pojedynczego procesu zmienności (Barndorff-Nielsen, Shephard, 2001). Ponadto zaproponowana specyfikacja zostanie wykorzystana w badaniu empirycznym do oszacowania parametrów procesu zmienności dla polskiego rynku kapitałowego na przykładzie kursu EUR/PLN.

Układ artykułu jest następujący: w części drugiej zostaną omówione podstawowe własności modelu, w części trzeciej zaprezentowana zostanie specyfikacja filtra Kalmana dla złożenia procesów stochastycznej zmienności. Część czwarta to eksperyment symulacyjny, mający na celu zbadanie własności estymatora. Część piąta zawiera przykład zastosowania zaprezentowanej metody w badaniu empirycznym. Ostatnia część to podsumowania i wnioski.

## 2. Własności modelu

Najważniejszą cechą modelu (1) jest możliwość wykorzystania niegaussowskich procesów zmienności stochastycznej. O. E. Barndorff-Nielsen i N. Shephard (2001) wykazali, że dla dowolnego rozkładu prawdopodobieństwa  $\Phi$  na prostej  $\mathbb{R}$  samorozkładalnego<sup>1</sup> (*selfdecomposable*) istnieje stacjonarny proces Orsteina-Uhlenbecka spełniający równanie różniczkowe:

$$dX(t) = -\lambda X(t)dt + dL(\lambda t), \quad (6)$$

dla którego zmienna losowa  $X(t)$  ma rozkład  $\Phi$  dla dowolnego  $t \in \mathbb{R}_+$ . Proces

$(L(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$  nazywany jest procesem Lévy'ego ukrytym w tle (*background driving*

<sup>1</sup> Rozkład prawdopodobieństwa  $\Phi$  na prostej  $\mathbb{R}$  nazywamy samorozkładalnym, jeżeli jego funkcja charakterystyczna  $\phi$  spełnia warunek  $\phi(\zeta) = \phi(c\zeta)\phi_c(\zeta)$ , dla dowolnego  $\zeta \in \mathbb{R}$ ,  $c \in (0, 1)$  i pewnej rodziny funkcji charakterystycznych  $\{\phi_c : c \in (0, 1)\}$  (zob. Barndorff-Nielsen, Shephard, 2001).

Lévy proces, BDLP) lub procesem podporządkowanym (*subordinator*, por. Bertoin, 1996 oraz Kliber, 2013). Nietypowa postać różniczki  $dL(\lambda t)$  została wybrana tak, aby rozkład  $\Phi$  nie zależał od wartości parametru  $\lambda$ . Dzięki temu własności dynamiczne procesu zmienności (częstotliwość pojawiania się skoków) są rozdzielone od rozkładu  $\Phi$ . Do klasy rozkładów samorozkładalnych należy wiele rozkładów o pożądanych w zjawiskach finansowych własnościach (asymetryczność, grube ogony): odwrotny Gaussowski (*inverse Gaussian*), normalny odwrotny Gaussowski (*normal inverse Gaussian*), temperowany rozkład stabilny (*tempered stable*), gamma (por. Taufer, Leonenko, 2009). Między procesem  $(X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$  a  $(L(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$  istnieje zależność dana równaniem:

$$w(x) = -u(x) - xu'(x), \tag{7}$$

gdzie  $u$  i  $w$  są gęstościami miary Lévy’ego w reprezentacji Lévy’ego-Chinczyna odpowiednio procesów  $(X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$  i  $(L(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$ . Można zatem wybrać rozkład  $\Phi$  i dobrać odpowiedni BDLP albo odwrotnie – wybrać BDLP i wyznaczyć odpowiadający mu rozkład  $\Phi$ . Nie ma w literaturze kryterium, jak dobrać rozkład na podstawie danych empirycznych (Griffin, Steel, 2006). W dotychczasowych pracach najczęściej wykorzystywano rozkład gamma (Barndorff-Nielsen, Shephard, 2001; Griffin, Steel, 2006; 2010) lub odwrotny Gaussowski (Taufer, Leonenko, Bee, 2011). W dalszej części artykułu przyjmujemy następujące oznaczenia dla parametrów rozkładu  $\Phi$ :  $\xi$  – wartość oczekiwana,  $\omega$  – odchylenie standardowe.

Trajektorie procesu zmienności  $(X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$  poruszają się do góry wyłącznie skokami (punkty nieciągłości), natomiast między skokami trajektorie maleją wykładniczo, ze stopą persistencji  $\lambda$ . Skoki w procesie  $(X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$  są związane ze skokami procesu  $(L(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$  i pojawiają się według stopy  $\lambda$ . Oznacza to, że im większa wartość  $\lambda$ , tym częściej pojawiają się skoki trajektorii i szybciej maleją wartości procesu zmienności  $(X(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$  (proces zmienności ma krótszą „pamięć”). Proces  $X_t^*$  nazywany jest zmiennością zintegrowaną (*integrated volatility*) i dla modelu (1) ma postać:

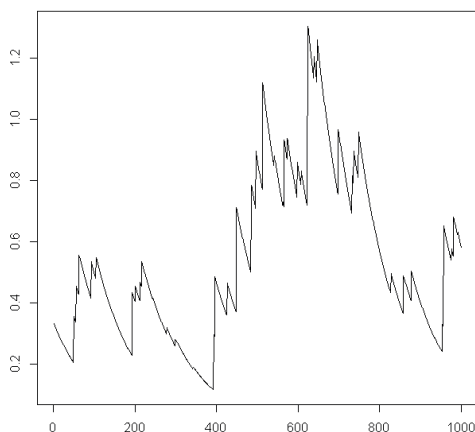
$$X^*(t) = \int_0^t X(u)du = \frac{1}{\lambda} [L(\lambda t) - X(t) + X(0)]. \tag{8}$$

Wzór (8) umożliwił wykazanie, że model (1) jest wolny od arbitrażu (Barndorff-Nielsen, Shephard, 2001) oraz wyznaczenie wyceny opcji w tym modelu w postaci

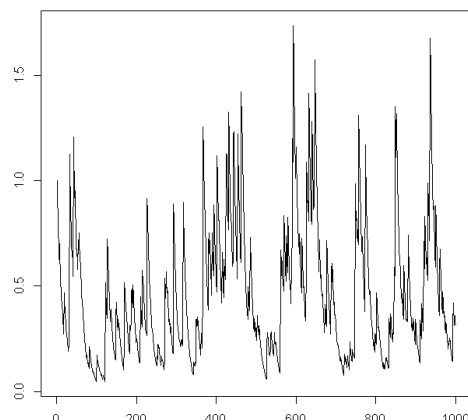
analitycznego rozwiązania (Nicolato, Venardos, 2003), co jest własnością rzadko spotykaną w modelach stochastycznej zmienności (por. Griffin, Steel, 2006).

Zauważmy, że przyrosty  $\Delta Y(t) = Y(t + \Delta) - Y(t)$ , czyli logarytmy stóp zwrotu w modelu (1) mają rozkład warunkowy (względem procesu zmienności) normalny  $\Delta Y_t | \Delta X_t^* = x_t^* \sim N\left(\mu\Delta, \sqrt{\Delta x_t^*}\right)$ , gdzie  $\Delta X_t^* = X_{t+\Delta}^* - X_t^*$ . Rozkład bezwarunkowy stóp zwrotu zależy od wyboru rozkładu  $\Phi$ . Wiadomo jednak, że gdy  $\Delta \rightarrow \infty$ , rozkład bezwarunkowy dąży do rozkładu normalnego (Barndorff-Nielsen, Shephard, 2001). Jest to własność często obserwowana w finansowych szeregach czasowych, gdy wraz ze zwiększaniem odstępów między obserwacjami rozkład staje się coraz bardziej zbliżony do normalnego (Cont, Tankov, 2004; Kliber, 2013).

(a)



(b)



Rysunek 1. Symulacja numeryczna pojedynczej trajektorii procesu Orsteina-Uhlenbecka (a) o rozkładzie brzegowym gamma z parametrami  $\alpha = 9, \gamma = 3, \lambda = 0,01$  oraz (b) odwrotny Gaussowski o parametrach  $\delta = 2, \gamma = 1, \lambda = 0,1$  (wykorzystano algorytm generowania trajektorii procesu SVOU zaproponowany przez Taufer i Leonenko, 2009)

Źródło: opracowanie własne przy użyciu programu R Cran

## 3. Filtr Kalmana

### 3.1. Postać ogólna filtru Kalmana

Filtr Kalmana jest algorytmem rekurencyjnym umożliwiającym oszacowanie wektora stanu liniowego układu dynamicznego  $(x_t)_{t \in T}$ , przy użyciu pomiarów  $(y_t)_{t \in T}$  liniowo związanych z tym stanem. Nazwa metody pochodzi od jej pomysłodaw-

cy – Rudolfa Kalmana. W ciągu ponad 50 lat od powstania metoda ta stała się jedną z najczęściej stosowanych w dziedzinie przetwarzania sygnałów. Najbardziej znanym przykładem zastosowania filtru Kalmana było wykorzystanie go w programie załogowych misji „Apollo” do nawigacji lądownika księżycowego (Grewal, Andrews, 2010).

Zastosowanie filtru Kalmana wymaga, aby badany model statystyczny można było zapisać w postaci układu równań:

$$\begin{cases} y_t = d + \Pi x_t + u_t \\ x_t = \Xi x_{t-1} + \eta_t \end{cases}, \quad (9)$$

gdzie:

$y_t \in R^p$  – wektor pomiarowy,

$x_t \in R^s$  – wektora stanu badanego procesu,

$d \in R^p$  – wyraz wolny,

$u_t \sim N(0, \Theta)$  – wektor szumu pomiarowego, o którym zakłada się, że ma rozkład normalny o zerowym wektorze wartości oczekiwanej i znanej macierz kowariancji  $\Theta \in M(p \times p)$ ,

$\eta_t \sim N(0, \Omega)$  – wektor szumu procesu, o którym zakłada się, że ma rozkład normalny o zerowym wektorze wartości oczekiwanej i znanej macierz kowariancji  $\Omega \in M(s \times s)$ ,

$\Xi \in M(s \times s)$  – macierz przejścia,

$\Pi \in M(p \times s)$  – macierz filtru.

Filtr Kalmana jest rekurencyjnym algorytmem składającym się z dwóch faz:

- pierwsza faza algorytmu (nazywana predykacją lub aktualizacją czasową) składa się z dwóch równań:
  - równanie aktualizacji czasowej wektora stanu:

$$\hat{x}_{t|t-1} = \Pi \hat{x}_{t-1|t-1} + \hat{u}_{t-1}, \quad (10)$$

gdzie:

$\hat{x}_{t|t-1}$  – oszacowanie wektora stanu w momencie  $t$  (przed pomiarem, *a priori*),

$\hat{x}_{t-1|t-1}$  – oszacowanie wektora stanu w momencie  $t - 1$  (po pomiarze, *a posteriori*);

- równanie aktualizacji czasowej macierzy kowariancji:

$$P_{t|t-1} = \Pi P_{t-1|t-1} \Pi^T + \Omega, \quad (11)$$

gdzie:

$$P_{t|t-1} = E \left[ \tilde{\mathbf{x}}_{t|t-1} \tilde{\mathbf{x}}_{t|t-1}^T \right] - \text{macierz kowariancji wektora reszt } \tilde{\mathbf{x}}_{t|t-1} = \mathbf{x}_t - \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1}$$

$$P_{t-1|t-1} = E \left[ \tilde{\mathbf{x}}_{t-1|t-1} \tilde{\mathbf{x}}_{t-1|t-1}^T \right] - \text{macierz kowariancji wektora reszt}$$

$$\tilde{\mathbf{x}}_{t-1|t-1} = \mathbf{x}_{t-1} - \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1};$$

- druga faza (nazywana korekcją) składa się z trzech równań:
  - wyznaczanie wzmocnienia Kalmana:

$$K_t = P_{t|t-1} \Pi^T \left[ \Pi^T P_{t|t-1} \Pi^T + \Theta \right]^{-1}, \quad (12)$$

- aktualizacja wektora stanu:

$$\hat{\mathbf{x}}_{t|t} = \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1} + K_t \left[ y_t - \Xi \hat{\mathbf{x}}_{t|t-1} \right] \quad (13)$$

- aktualizacja macierzy kowariancji:

$$P_{t|t} = P_{t|t-1} - K_t \left[ \Pi^T P_{t|t-1} \Pi^T + \Theta \right] K_t^T. \quad (14)$$

W trakcie fazy predykcji, bazując na stanie po pomiarze (*a posteriori*)  $\hat{\mathbf{x}}_{t-1|t-1}$  z kroku  $t-1$ , wyznacza się estymowaną wartość stanu w momencie  $t$  oraz kowariancję wektora reszt  $P_{t|t-1}$ . Otrzymane oszacowania nazywane są oszacowaniami przed pomiarem (*a priori*). Pomiar  $y_t$  w drugiej fazie służy do wyznaczenia wartości po pomiarze (*a posteriori*) wektora stanu  $\hat{\mathbf{x}}_{t|t}$  i kowariancji reszt  $P_{t|t}$ . Wzmocnienie Kalmana można rozumieć jako rodzaj wagi, z jaką faza korekcji wpływa na estymowany przed pomiarem stan: czy bardziej „ufamy” naszej ocenie stanu na podstawie równania aktualizacji pomiarowej, czy informacji zawartej w pomiarach. Wzmocnienie Kalmana równe macierzy zerowej oznaczałoby, że zupełnie ignorujemy pomiary.

Widać zatem, że algorytm filtru Kalmana ma charakter sprzężenia zwrotnego: wartości przed pomiarem w momencie  $t$  służą do wyznaczenia wartości po pomiarze w momencie  $t$ , które z kolei służą do wyznaczenia wartości przed pomiarem w momencie  $t+1$  itd. Do rozpoczęcia algorytmu konieczne jest podanie wartości stanu  $\hat{\mathbf{x}}_{0|0}$  oraz macierzy kowariancji  $P_{0|0}$  w momencie  $t=0$ .

W przypadku, gdy macierze  $\Xi$ ,  $\Pi$ ,  $\Theta$ ,  $\Omega$  i wektor wyrazów wolnych  $d$  zależą od pewnego wektora parametrów  $\psi \in R^k$ , można wyznaczyć oszacowanie para-



metrów metodą największej wiarygodności, maksymalizując następującą funkcję wiarygodności:

$$\Delta Y_t | \Delta X_t^* = x_t^* \sim N(\mu\Delta, \sqrt{\Delta x_t^*}), \quad \Delta X_t^* = X_{t+\Delta}^* - X_t^*, \quad (15)$$

gdzie  $D_t = \Pi^T P_{t|t-1} \Pi + \Theta$ .

Postać funkcji wiarygodności zakłada, że zaburzenia w równaniach pomiaru i procesu mają rozkład normalny. Przy spełnieniu tych założeń estymatory wyznaczone za pomocą funkcji wiarygodności (15) są zgodne i asymptotycznie efektywne. W przypadku, gdy rozkłady zaburzeń nie spełniają rozkładu normalnego, filtr Kalmana pozostaje estymatorem zgodnym, ale przestaje być asymptotycznie efektywnym (Hamilton, 1994).

### 3.2. Postać filtru Kalmana dla modelu stochastycznej zmienności

Barndorff-Nielsen i Shephard (2001) zaproponowali przedstawienie modelu stochastycznej zmienności (1) w postaci umożliwiającej zastosowanie filtru Kalmana. Punktem wyjścia są dwie własności:

- liniowa reprezentacja przestrzeni pomiaru:

$$\begin{bmatrix} \Delta Y_t \\ \Delta Y_t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu\Delta \\ \mu^2 \Delta^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \lambda^{-1} & 0 \end{bmatrix} x_t + u_t, \quad (16)$$

gdzie:

$$E(u_t) = E\left(\begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix}\right) = 0, \quad Var(u_t) = 2\omega \begin{bmatrix} \xi\Delta & 2\mu\Delta^2\xi \\ 2\mu\Delta^2\xi & 4\mu^2\Delta^3\xi + 2(2\omega^2 r^{**}(\Delta) + \xi^2\Delta^2) \end{bmatrix}, \quad (17)$$

- liniowa postać równania przejścia procesu zmienności:

$$x_t = \begin{bmatrix} 0 & 1 - e^{-\lambda\Delta} \\ 0 & e^{-\lambda\Delta} \end{bmatrix} x_t + \tilde{\eta}_t, \quad (18)$$

gdzie:

$$\eta_t = \begin{bmatrix} \tilde{\eta}_{1t} - \tilde{\eta}_{2t} \\ \tilde{\eta}_{2t} \end{bmatrix}, \quad E(\tilde{\eta}_t) = E\left(\begin{bmatrix} \tilde{\eta}_{1t} \\ \tilde{\eta}_{2t} \end{bmatrix}\right) = \xi \begin{bmatrix} 1 - e^{-\lambda\Delta} \\ \lambda\Delta \end{bmatrix}, \quad (19)$$

$$Var(\tilde{\eta}_t) = 2\omega \begin{bmatrix} 1/2(1 - e^{-2\lambda\Delta}) & (1 - e^{-\lambda\Delta}) \\ (1 - e^{-\lambda\Delta}) & \lambda\Delta \end{bmatrix}.$$

Równania (16) i (18) można połączyć w układ równań postaci:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \Delta Y_t \\ \Delta Y_t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu\Delta \\ \mu^2\Delta^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \lambda^{-1} & 0 \end{bmatrix} x_t + \begin{bmatrix} u_{1t} \\ u_{2t} \end{bmatrix} \\ x_t = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1 - e^{-\lambda\Delta}}{\lambda} \\ 0 & e^{-\lambda\Delta} \end{bmatrix} x_{t-1} + \begin{bmatrix} \tilde{\eta}_{1t} - \tilde{\eta}_{2t} - \xi(1 - e^{-\lambda\Delta}) \\ \tilde{\eta}_{2t} - \xi\Delta \end{bmatrix} \end{cases}, \quad (20)$$

co oznacza, że model stochastycznej zmienności (1) można przedstawić w postaci (9), dla którego:

$$y_t = \begin{bmatrix} \Delta Y_t \\ \Delta Y_t^2 \end{bmatrix}, d = \begin{bmatrix} \mu\Delta \\ \mu^2\Delta^2 \end{bmatrix}, x_t = \begin{bmatrix} \lambda X_t \\ X(t) \end{bmatrix}, \Pi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \lambda^{-1} & 0 \end{bmatrix}, \Xi = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1 - e^{-\lambda\Delta}}{\lambda} \\ 0 & e^{-\lambda\Delta} \end{bmatrix}.$$

Zmienne losowe  $u_t$  dla  $t = 0, 1, \dots, T$  nie mają rozkładu normalnego, ale są niezależne, o wartościach oczekiwanych i macierzy kowariancji danych wzorem (12). Zmienne losowe  $\eta_t$  również nie mają rozkładu normalnego, ale są niezależne, o wartości oczekiwanej równej wektorowi zerowemu i macierzy kowariancji postaci:

$$\begin{aligned} Var(\eta_t) &= 2\omega \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2(1 - e^{-2\lambda\Delta}) & (1 - e^{-\lambda\Delta}) \\ (1 - e^{-\lambda\Delta}) & \lambda\Delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \\ &= 2\omega \begin{bmatrix} (-3/2 - 1/2e^{-2\lambda\Delta} + e^{-\lambda\Delta} + \lambda\Delta) & (1 - e^{-\lambda\Delta} - 1/2 \cdot (1 - e^{-\lambda\Delta})) \\ (1 - e^{-\lambda\Delta} - 1/2(1 - e^{-\lambda\Delta})) & 1/2 \cdot (1 - e^{-\lambda\Delta}) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (21)$$

### 3.3. Propozycja filtru Kalmana dla złożenia procesów stochastycznej zmienności

Specyfikacja filtru Kalmana dla modelu stochastycznej zmienności ze złożeniem procesów zmienności przyjmuje następującą postać:

– Równanie pomiaru:

$$\begin{bmatrix} \Delta Y_t \\ \Delta Y_t^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu\Delta \\ \mu^2\Delta^2 \end{bmatrix} + \sum_{j=1}^p \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \lambda_j^{-1} & 0 \end{bmatrix} x_t^{(j)} + u_t = \begin{bmatrix} \lambda_1 X_t^{(1)} \\ X^{(1)}(t) \\ \vdots \\ \lambda_p X_t^{(p)} \\ X^{(p)}(t) \end{bmatrix} + u_t. \quad (22)$$

Macierz  $\Pi$  przyjmuje postać blokową  $\Pi = [\Pi_1 \ \dots \ \Pi_p]$  o blokach  $\Pi_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \lambda_j^{-1} & 0 \end{bmatrix}$ . Nie ulega zmianie postać zmiennej losowej  $u_t$ .

– Równanie procesu:

$$x_t = \begin{bmatrix} \lambda_1 X_t^{(1)} \\ X^{(1)}(t) \\ \vdots \\ \lambda_p X_t^{(p)} \\ X^{(p)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1-e^{-\lambda_1\Delta}}{\lambda_1} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\lambda_1\Delta} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1-e^{-\lambda_p\Delta}}{\lambda_p} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & e^{-\lambda_p\Delta} \end{bmatrix} x_{t-1} + \begin{bmatrix} \tilde{\eta}_{1t}^{(1)} - \tilde{\eta}_{2t}^{(1)} - \xi(1-e^{-\lambda_1\Delta}) \\ \tilde{\eta}_{2t}^{(1)} - \xi\lambda_1\Delta^2 \\ \vdots \\ \tilde{\eta}_{1t}^{(p)} - \tilde{\eta}_{2t}^{(p)} - \xi(1-e^{-\lambda_p\Delta}) \\ \tilde{\eta}_{2t}^{(p)} - \xi\lambda_p\Delta^2 \end{bmatrix}. \quad (23)$$

Macierz  $\Xi$  staje się zatem macierzą blokowo-diagonalną o blokach  $\Xi_j = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1-e^{-\lambda_j\Delta}}{\lambda_j} \\ 0 & e^{-\lambda_j\Delta} \end{bmatrix}$ . Macierz kowariancji zmiennej losowej  $\eta_t$  jest również macierzą blokowo-diagonalną o blokach:

$$Var(\eta_t^{(j)}) = 2\omega \begin{bmatrix} (-3/2 - 1/2e^{-2\lambda_j\Delta} + e^{-\lambda_j\Delta} + \lambda\Delta) & (1-e^{-\lambda_j\Delta} - 1/2 \cdot (1-e^{-\lambda_j\Delta})) \\ (1-e^{-\lambda_j\Delta} - 1/2(1-e^{-\lambda_j\Delta})) & 1/2 \cdot (1-e^{-\lambda_j\Delta}) \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Zaproponowane uogólnienie, podobnie jak wyjściowa postać (20), nie zależy od wyboru rozkładu brzegowego  $\Phi$ , a jedynie od wartości oczekiwanej rozkładu  $\xi$  i jego odchylenia standardowego  $\omega$ . Oba podejścia charakteryzuje także to, że funkcje wiarygodności próby można traktować jedynie jako aproksymacje prawdziwej, ale nieznannej funkcji wiarygodności, ponieważ zmienne losowe  $u_t$  i  $\eta_t$  nie mają rozkładu

normalnego. Propozycja nie rozróżnia wpływu poszczególnych wartości oczekiwanych procesów zmienności  $\xi_1, \dots, \xi_p$ , a jedynie umożliwia oszacowanie wartości oczekiwanej złożenia procesów  $\xi$ . Innym autorom również nie udało się oszacować oddzielnie parametrów  $\xi_1, \dots, \xi_p$  (por. Griffin, Steel, 2006; 2010; Taufer, Leonenko, Bee, 2011).

## 4. Badanie symulacyjne

W celu zbadania własności zaproponowanego estymatora przeprowadzono badanie symulacyjne. Wykorzystano dwa warianty symulacji: bez złożenia procesu zmienności oraz złożenie dwóch procesów zmienności. Za każdym razem dokonano 1000 symulacji, przy czym każda symulacja składała się z 2000 obserwacji. Do wykonania symulacji trajektorii procesów zmienności wykorzystano metodę opisaną przez E.O. Barndorffa-Nielsen i N. Shepharda (2001). Zaproponowana w tej pracy metoda pozwala na wykorzystanie jako rozkładu brzegowego procesu zmienności jedynie rozkładu gamma  $\Phi \sim G(\alpha, \nu)$ . Odpowiednie wartości rozkładów brzegowych można wyznaczyć z zależności:  $\alpha = \xi/\omega^2$  oraz  $\nu = \xi^2/\omega^2$ . W pierwszym wariantcie symulacji proces zmienności miał zatem rozkład brzegowy  $\Phi \sim G(10,9)$ , a w drugim procesy miały rozkłady  $\Phi_1 \sim G(90,81)$  i  $\Phi_2 \sim G(14,4, 12,96)$ . Dla każdej symulacji wyznaczono oszacowania parametrów procesu zmienności. Do wyznaczenia parametrów wykorzystany został algorytm *Limited-memory BFGS*<sup>2</sup> zaimplementowany w funkcji *optim* pakietu *stats* programu R Cran. Otrzymane wyniki przedstawiają tabele 1 i 2.

Tabela 1. Oszacowane wartości parametrów ( $p$  – liczba procesów zmienności) dla pierwszego wariantu symulacji: prawidłowym modelem jest model bez złożenia procesów zmienności ( $p = 1$ ).  
W nawiasach odchylenie standardowe otrzymanych oszacowań

| Parametr    | Wartość parametru | Otrzymane oszacowania parametrów (odchylenie standardowe otrzymanych oszacowań) |                    |                    |
|-------------|-------------------|---|--------------------|--------------------|
|             |                   | $p = 1$   | $p = 2$            | $p = 3$            |
| $\mu$       | 0,03              | 0,0341<br>(0,0254)  | 0,0349<br>(0,0251) | 0,0348<br>(0,0250) |
| $\xi$       | 0,9               | 0,9344<br>(0,0881)  | 0,9641<br>(0,0890) | 0,9635<br>(0,0904) |
| $\lambda_1$ | 0,01              | 0,0143<br>(0,0017)  | 0,0262<br>(0,0128) | 0,0296<br>(0,0132) |
| $\lambda_2$ | –                 | –   | 0,0182<br>(0,0110) | 0,0223<br>(0,0118) |
| $\lambda_3$ | –                 | –   | –                  | 0,3223<br>(0,3118) |

<sup>2</sup> Algorytm *Limited-memory BFGS* jest numerycznym algorytmem znajdowania ekstremów lokalnych funkcji wielu zmiennych należącym do rodziny metod quasi-Newtonowskich (Byrd i wsp., 1995).

| Parametr   | Wartość parametru | Otrzymane oszacowania parametrów (odchylenie standardowe otrzymanych oszacowań) |                     |                    |
|------------|-------------------|---|---------------------|--------------------|
|            |                   | $p = 1$   | $p = 2$             | $p = 3$            |
| $\omega_1$ | 0,3               | 0,4533<br>(0,0723)  | 0,14046<br>(0,2207) | 0,0902<br>(0,1335) |
| $\omega_2$ | –                 | –   | 0,28524<br>(0,2502) | 0,2774<br>(0,1997) |
| $\omega_3$ | –                 | –   | –                   | 0,3514<br>(0,2121) |

Źródło: opracowanie własne

Tabela 2. Oszacowane wartości parametrów ( $p$  – liczba procesów zmienności) dla drugiego wariantu symulacji: prawidłowym modelem jest model złożenia dwóch procesów zmienności ( $p = 2$ ). W nawiasach odchylenie standardowe otrzymanych oszacowań

| Parametr    | Wartość parametru | Otrzymane oszacowania parametrów (odchylenie standardowe otrzymanych oszacowań) |                    |                      |
|-------------|-------------------|---|--------------------|----------------------|
|             |                   | $p = 1$   | $p = 2$            | $p = 3$              |
| $\mu$       | 0,03              | 0,0347<br>(0,0239)  | 0,0317<br>(0,0236) | 0,0387<br>(0,0246)   |
| $\xi$       | 0,9               | 0,9315<br>(0,0291)  | 0,9431<br>(0,0305) | 0,9530<br>(0,0405)   |
| $\lambda_1$ | 0,05              | 0,0102<br>(0,0121)  | 0,0196<br>(0,1318) | 0,0131<br>(0,1413)   |
| $\lambda_2$ | 0,3               | –   | 0,4198<br>(0,2883) | 0,4627<br>(0,7088)   |
| $\lambda_3$ | –                 | –   | –                  | 0,4825<br>(0,7157)   |
| $\omega_1$  | 0,1               | 0,1750<br>(0,0585)  | 0,0681<br>(0,0922) | 0,08640<br>(0,1232)  |
| $\omega_2$  | 0,25              | –   | 0,1864<br>(0,1063) | 0,1892<br>(0,1343)   |
| $\omega_3$  | –                 | –   | –                  | 0,16201<br>(0,17829) |

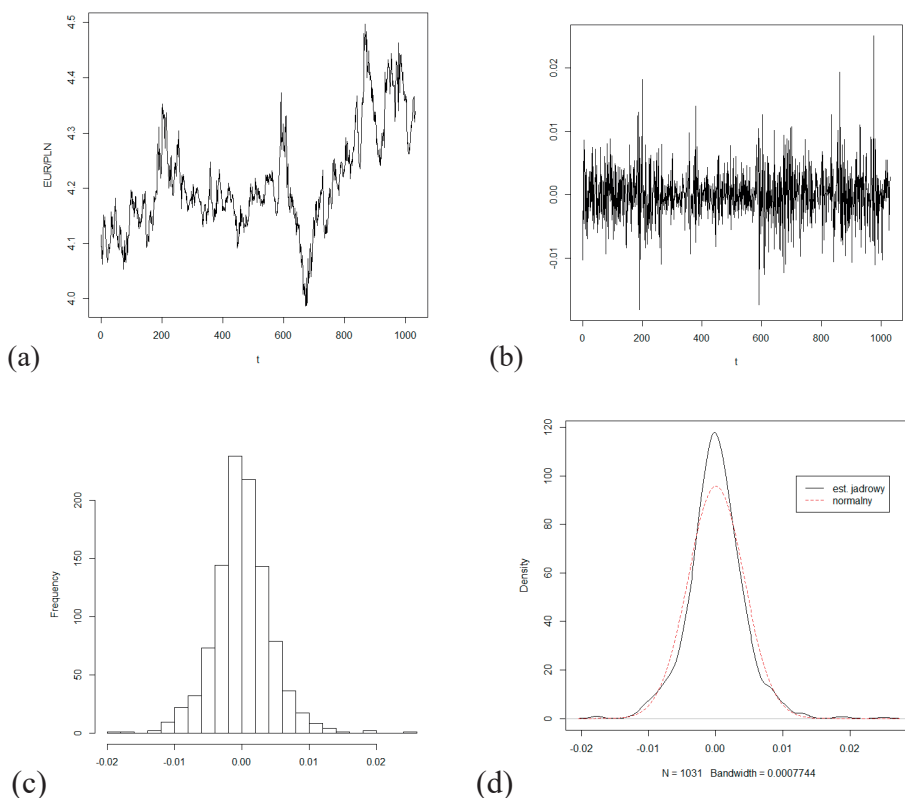
Źródło: opracowanie własne

Na podstawie eksperymentu symulacyjnego można zauważyć, że oszacowania parametrów  $\mu$  i  $\xi$  są zbliżone dla wszystkich wariantów filtru Kalmana i bliskie prawdziwych wartości parametrów, bez względu na to, czy prawdziwy jest pojedynczy proces zmienności, czy złożenie dwóch procesów zmienności. Natomiast parametry persystencji  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  i odchyłeń standardowych  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  są niedoszacowane. Na podstawie wyników eksperymentu symulacyjnego można próbować wskazać, jak rozróżnić, czy proces zmienności generujący dane jest pojedynczy, czy jest złożeniem dwóch lub więcej procesów. Wskazówką mogą być odchylenia standardowe oszacowań parametrów. W wariantcie pierwszym eksperymentu,

gdy prawidłowym procesem generującym dane był pojedynczy proces zmienności, modele zakładające złożenie procesów (czyli dla  $p = 2$  i  $p = 3$ ) dają oszacowania nieistotnych parametrów ( $\lambda_2, \lambda_3, \omega_2, \omega_3$ ) o dużym odchyleniu standardowym.

## 5. Badanie empiryczne

Badanie empiryczne zostanie przedstawione na przykładzie modelowania kursu EUR/PLN. Dane dzienne pochodzą z okresu od 10.09.2012 do 9.09.2016 (1032 obserwacje). Na rysunku 2 przedstawiony został analizowany szereg czasowy. Tabela 3 ukazuje podstawowe statystyki opisowe szeregu logarytmicznych stóp zwrotu. Na podstawie rysunku 2 i tabeli 3 można zauważyć, że szereg czasowy spełnia takie stylizowane fakty empiryczne przypisywane finansowym szeregom czasowym, jak leptokurtyczność rozkładu czy grupowanie wariancji.



Rysunek 2. Notowania indeksu EUR/PLN (a), logarytmiczne stopy zwrotu (b), histogram logarytmicznych stóp zwrotu (c) oraz estymator gęstości jądrowej w zestawieniu z gęstością rozkładu normalnego dopasowanego do danych (d)

Źródło: opracowanie własne

Tabela 3. Podstawowe statystyki opisowe kursu EUR/PLN (dziennie obserwacje z okresu od 10.09.2012 do 9.09.2016)

| Liczba obserwacji | Średnia | Odchylenie standardowe | Skośność | Eksces | Min    | Max   |
|-------------------|---------|------------------------|----------|--------|--------|-------|
| 1032              | 0,000   | 0,004                  | 0,26099  | 2,663  | -0,018 | 0,025 |

Źródło: opracowanie własne

Na podstawie danych oszacowano parametry dla modelu stochastycznej zmienności (1) za pomocą specyfikacji filtru Kalmana dla pojedynczego procesu zmienności oraz złożenia dwóch i trzech procesów zmienności (5). Otrzymane wyniki przedstawia tabela 4. Na rysunku 3 przedstawiono porównanie empirycznej funkcji autokorelacji kwadratów stóp zwrotu oraz teoretycznych funkcji autokorelacji wyznaczonych za pomocą wzoru (Barndorff-Nielsen, Shephard, 2001):

$$\text{cov}(y_t^2, y_{t+s}^2) = \sum_{j=1}^p d_j e^{-\lambda_j \Delta (s-1)}, \quad (25)$$

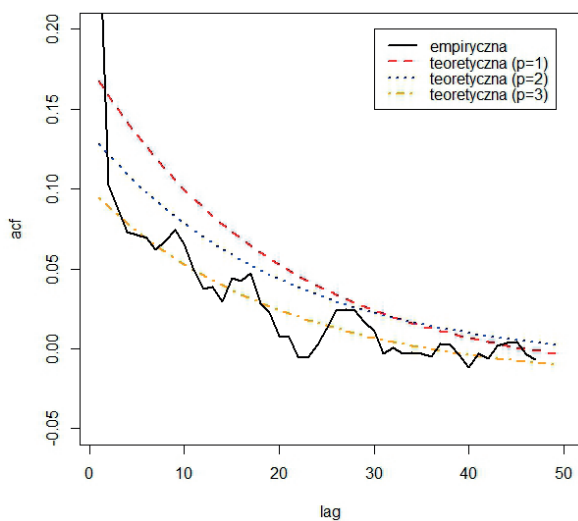
$$\text{gdzie } d_j = \frac{(w_j / \lambda_j^2)(1 - e^{-\lambda_j \Delta})^2}{6 \sum_{j=1}^p (w_j / \lambda_j^2)(e^{-\lambda_j \Delta} - 1 + \lambda_j \Delta) + 2\Delta^2 \left( \xi / \sum_{j=1}^p \omega_j^2 \right)^2}.$$

Na podstawie tabeli 4 można zauważyć, że oszacowania parametrów  $\mu$  i  $\xi$  różnią się nieznacznie między modelami. Wartość parametru  $\mu$  wskazuje na dodatnią stopę wzrostu logarytmicznych stóp wzrostu w badanym okresie, co jest zgodne z rysunkiem 2. Model bez złożenia procesów zmienności ( $p = 1$ ) wydaje się nieco bardziej odpowiedni niż model ze złożeniem dwóch procesów stochastycznych ( $p = 2$ ), ale gorszy niż model ze złożeniem trzech procesów ( $p = 3$ ). Dla złożenia dwóch procesów nie ma różnicy między wartościami parametrów  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$ , model prostszy, bez złożenia, wydaje się zatem bardziej odpowiedni. Dopiero złożenie trzech procesów pozwoliło wyodrębnić proces zmienności o większej stopie persystencji (oszacowanie parametru  $\lambda_1$ ). Wyniki te potwierdza rysunek 3, ponieważ teoretyczne funkcje autokorelacji dla  $p = 1$  i  $p = 2$  słabo odzwierciedlają empiryczną funkcję autokorelacji kwadratów stóp zwrotu. Dopiero dodanie trzeciego procesu zmienności ( $p = 3$ ), o większej stopie persystencji, umożliwia otrzymanie teoretycznej funkcji autokorelacji zbliżonej do empirycznej.

Tabela 4. Oszacowane wartości parametrów ( $p$  – liczba procesów zmienności). W nawiasach błęd standardowy wyznaczony na podstawie odwrotnej macierzy informacji Fishera

| Parametr    | $p = 1$            | $p = 2$            | $p = 3$            |
|-------------|--------------------|--------------------|--------------------|
| $\mu$       | 0,1254<br>(0,0344) | 0,1126<br>(0,0343) | 0,1192<br>(0,0344) |
| $\xi$       | 0,0064<br>(0,0003) | 0,0064<br>(0,0003) | 0,0065<br>(0,0003) |
| $\lambda_1$ | 0,0101<br>(0,0049) | 0,0117<br>(0,0151) | 0,2957<br>(0,2888) |
| $\lambda_2$ | –                  | 0,0102<br>(0,0058) | 0,0155<br>(0,0113) |
| $\lambda_3$ | –                  | –                  | 0,0161<br>(0,0991) |
| $\omega_1$  | 0,0066<br>(0,0004) | 0,0023<br>(0,0030) | 0,0002<br>(0,0006) |
| $\omega_2$  | –                  | 0,0061<br>(0,0012) | 0,0048<br>(0,0010) |
| $\omega_3$  | –                  | –                  | 0,0041<br>(0,0012) |

Źródło: opracowanie własne



Rysunek 3. Empiryczna funkcja autokorelacji kwadratów logarytmicznych stóp zwrotu (kolor czarny) oraz teoretyczne wartości funkcji autokorelacji kwadratów logarytmicznych stóp zwrotu wyznaczone dla pojedynczego procesu zmienności (kolor czerwony), dwóch procesów zmienności (kolor niebieski) i trzech procesów zmienności (kolor żółty)

Źródło: opracowanie własne



Na podstawie oszacowanych parametrów przeprowadzono 30 jednodniowych prognoz na okres 10.09–10.10.2016. Jako miarę dziennej zmienności przyjęto nieparametryczny estymator Parkinsona (1980). Wyniki błędów prognozy przedstawiono w tabeli 5.

Tabela 5. Wartości błędów prognoz jednodniowych na okres 10.09–10.10.2016 modeli stochastycznej zmienności ( $p$  – liczba procesów zmienności)

|         | ME      | RMSE    | MAE     |
|---------|---------|---------|---------|
| $p = 1$ | 0,01381 | 0,01731 | 0,01581 |
| $p = 2$ | 0,01133 | 0,01233 | 0,01183 |
| $p = 3$ | 0,00537 | 0,00641 | 0,00568 |

Źródło: opracowanie własne

Przedstawione w tabeli 5 wartości błędów są zbliżone dla jednego i dwóch procesów zmienności. Dopiero złożenie trzech procesów zmienności poprawiło wyniki prognoz. Można zatem ponownie zauważyć, że model ze złożeniem trzech procesów najlepiej odzwierciedla badane zjawisko.

## 6. Podsumowanie

W artykule przedstawiono zastosowanie filtru Kalmana do estymacji modeli stochastycznej zmienności, opartych na złożeniu dwóch lub więcej niegaussowskie procesów Ornsteina-Uhlenbecka. Eksperyment symulacyjny pokazał, że estymacja pozwala precyzyjnie oszacować parametry. Następnie wykorzystano zaproponowaną metodę do modelowania kursu EUR/PLN. Okazało się, że model z trzema procesami zmienności lepiej odzwierciedla zmienności logarytmicznych stóp zwrotu w badanym okresie niż pojedynczy proces zmienności lub złożenie dwóch procesów.

W dalszej perspektywie można kontynuować badania nad zastosowaniem filtru Kalmana w modelowaniu niegaussowskich procesów zmienności, rozszerzając metodę na przypadek, gdy w modelu pojawia się „efekt dźwigni”, czyli taki, w którym spadki cen są silnie skorelowane ze skokami procesu zmienności. Taki przypadek rozważali w swojej pracy m.in. J.E. Griffin i M.F.J. Steel (2006).

## Bibliografia

- Andrieu C., Doucet A., Holenstein R. (2010), *Particle Markov Chain Monte Carlo Methods*, „Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)”, t. 72(3), s. 269–342.
- Barndorff-Nielsen O.E., Shephard N. (2001), *Non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck-based models and some of their uses in financial economics*, „Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)”, t. 63, nr 2, s. 167–241. doi: 10.1111/1467-9868.00282.
- Barndorff-Nielsen O.E., Stelzer R. (2013), *The multivariate supOU stochastic volatility model*, „Mathematical Finance”, t. 23(2), s. 275–296.
- Bertoin J. (1996), *Lévy processes*, t. 121, Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press, London.
- Bibby B.M., Sørensen M. (1995), *Martingale estimation functions for discretely observed diffusion processes*, „Bernoulli”, t. 1, nr 1/2, s. 17–39, doi: 10.2307/3318679.
- Byrd R.H., Lu P., Nocedal J., Zhu C. (1995), *A limited memory algorithm for bound constrained optimization*, „SIAM J. Scientific Computing”, t. 16, nr 5, s. 1190–1208, doi: 10.1137/0916069.
- Cont R., Tankov P. (2004), *Financial Modelling with jump processes*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton.
- Gander M.P.S., Stephens D.A. (2007a), *Stochastic volatility modelling in continuous time with general marginal distributions: Inference, prediction and model selection*, „Journal of Statistical Planning and Inference”, t. 137, nr 10, s. 3068–3081, doi: 10.1016/j.jspi.2006.07.015.
- Gander M.P.S., Stephens D.A. (2007b), *Simulation and inference for stochastic volatility models driven by levy processes*, „Biometrika”, t. 94, nr 3, s. 627–646, doi: 10.1093/biomet/asm048.
- Gourieroux C., Monfort A., Renault E. (1993), *Indirect inference*, „Journal of Applied Econometrics”, t. 8, nr 1, s. S85–S118, doi: 10.1002/jae.3950080507.
- Grewal M., Andrews A. (2010), *Applications of Kalman filtering in aerospace 1960 to the present*, „Historical perspectives. IEEE Control Systems Magazine”, t. 30, nr 3, s. 69–78, doi: 10.1109/mcs.2010.936465.
- Griffin J.E., Steel M.F.J. (2006), *Inference with non-gaussian Ornstein-Uhlenbeck processes for stochastic volatility*, „Journal of Econometrics”, t. 134, nr 2, s. 605–644, doi: 10.1016/j.jeconom.2005.07.007.
- Griffin J.E., Steel M.F.J. (2010), *Bayesian inference with stochastic volatility models using continuous superpositions of non-gaussian Ornstein-Uhlenbeck processes*, „Computational Statistics & Data Analysis”, t. 54, nr 11, s. 2594–2608, doi: 10.1016/j.csda.2009.06.008.
- Hamilton J.D. (1994), *State-space models*, [w:] R.F. Engle, *Handbook of econometrics*, t. 4, North Holland, Amsterdam.
- Hubalek F., Posedel P. (2011), *Joint analysis and estimation of stock prices and trading volume in Barndorff-Nielsen and Shephard stochastic volatility models*, „Quantitative Finance”, t. 11(6), s. 917–932.
- Kliber P. (2013), *Zastosowanie procesów dyfuzji ze skokami do modelowania polskiego rynku finansowego*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu, Poznań.
- Nicolato E., Venardos E. (2003), *Option pricing in stochastic volatility models of the Ornstein-Uhlenbeck type*, „Mathematical Finance”, t. 13, nr 4, s. 445–466, doi: 10.1111/1467-9965.t01-1-00023.
- Parkinson M. (1980), *The extreme value method for estimating the variance of the rate of return*, „Journal of Business”, t. 53, nr 1, s. 61–65.
- Pigorsch C., Stelzer R. (2009), *A multivariate Ornstein-Uhlenbeck type stochastic volatility model*, <https://mediatum.ub.tum.de/doc/1079183/file.pdf> [dostęp: 28.01.2018].
- Pitt M.K., Shephard N. (1999), *Filtering via simulation: Auxiliary particle filters*, „Journal of the American Statistical Association”, t. 94, nr 446, s. 590–599, doi: 10.2307/2670179.


- Roberts G.O., Papaspiliopoulos O., Dellaportas P. (2004), *Bayesian inference for non-gaussian Ornstein-Uhlenbeck stochastic volatility processes*, „Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Statistical Methodology)”, t. 66, nr 2, s. 369–393, doi: 10.1111/j.1369-7412.2004.05139.x.
- Stelzer R., Tosstorff T., Wittlinger M. (2015), *Moment based estimation of supOU processes and a related stochastic volatility model*, „Statistics & Risk Modeling”, t. 32(1), s. 1–24.
- Taufer E., Leonenko N. (2009), *Simulation of Lévy-driven Ornstein-Uhlenbeck processes with given marginal distribution*, „Computational Statistics & Data Analysis”, t. 53(6), s. 2427–2437.
- Taufer E., Leonenko N., Bee M. (2011), *Characteristic function estimation of Ornstein-Uhlenbeck-based stochastic volatility models*, „Computational Statistics & Data Analysis”, t. 55(8), s. 2525–2539.

### Application of Kalman Filter to Stochastic Volatility Models of the Orstein-Uhlenbeck Type

**Abstract:** Barndorff-Nielsen and Shephard (2001) proposed a class of stochastic volatility models in which the volatility process is the Ornstein-Uhlenbeck process driven by a Lévy process without gaussian component. Parameter estimation of these models is difficult because the appropriate likelihood functions do not have a closed-form expression. The article deals with application of the Kalman filter technique for parameter estimation of such models. The method is applied to EUR/PLN daily exchange rate data. Empirical application is accompanied with simulation study to examine statistical properties of the estimators.

**Keywords:** stochastic volatility models, Levy processes

**JEL:** C58

|   |  |
|---|--|
|  | <p>© by the author, licensee Łódź University – Łódź University Press, Łódź, Poland.<br/>         This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution license CC-BY (<a href="http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/">http://creativecommons.org/licenses/by/3.0/</a>)</p> |
|   | <p>Received: 2016-12-28; verified: 2018-03-02. Accepted: 2018-06-27</p>  |