

Katarzyna Filipowicz^{}, Maciej Grodzicki^{**}
Tomasz Tokarski^{***}*

RÓWNOWAGA SOŁOWA PRZY ALTERNATYWNYCH TRAJEKTORIACH LICZBY PRACUJĄCYCH

Streszczenie. Celem opracowania jest zbadanie równowagi modelu wzrostu gospodarczego Solowa przy zmodyfikowanym założeniu dotyczącym stopy wzrostu liczby pracujących. W pierwszym wariancie przyjmuje się, że liczba pracujących zmienia się po trajektorii określonej przez funkcję logitową. Natomiast w drugim wariancie zakłada się, że stopa wzrostu liczby pracujących jest pewną malejącą funkcją wydajności pracy (tzw. post-maltuzjańska ścieżka wzrostu).

Przy logitowej ścieżce wzrostu liczby pracujących trajektorie technicznego uzbrojenia pracy i wydajności pracy określone są przez pewne funkcje złożone z funkcją hipergeometryczną Gaussa. Natomiast przy post-maltuzjańskiej ścieżce wzrostu liczby pracujących rozwiązanie równania Solowa zależne jest od przyjętej wartości parametru α (elastyczności produkcji względem nakładów kapitału) – może ono nie posiadać żadnego punktu stacjonarnego, posiadać jeden lub dwa nietrywialne punkty stacjonarne.

W przeprowadzonych w opracowaniu symulacjach numerycznych elastyczność produkcji względem nakładów kapitału skalibrowano na poziomie równym 0,68216. We wszystkich symulowanych wariantach stóp inwestycji, przy standardowej, logitowej oraz post-maltuzjańskiej trajektorii liczby pracujących, wydajność pracy rośnie do pewnej asymptoty. Asymptoty funkcji wydajności pracy dla trajektorii logitowej i post-maltuzjańskiej położone są na zbliżonym (nieznacznie wyższym dla trajektorii logitowej) poziomie. Obie położone są zdecydowanie wyżej niż asymptota funkcji wydajności pracy z oryginalnego modelu wzrostu gospodarczego Solowa.

Słowa kluczowe: stopa wzrostu liczby pracujących, równowaga modelu Solowa.

JEL: O40

1. WPROWADZENIE¹

Celem niniejszej pracy jest zbadanie równowagi modelu wzrostu gospodarczego Solowa przy zmodyfikowanym założeniu dotyczącym stopy wzrostu liczby pracujących. Autorzy przyjmują, że liczba pracujących może rosnąć do pewnej asymptoty po krzywej logitowej lub że stopa wzrostu liczby pracujących

^{*} Katedra Ekonomii Matematycznej Uniwersytetu Jagiellońskiego, k.filipowicz@uj.edu.pl

^{**} Katedra Ekonomii Matematycznej Uniwersytetu Jagiellońskiego, maciej.grodzicki@uj.edu.pl

^{***} Katedra Ekonomii Matematycznej Uniwersytetu Jagiellońskiego, tomtok67@tlen.pl

¹ Opracowanie powstało w ramach grantu NCN pt. *Cykle wzrostu – dynamiczne modele koniunktury i wzrostu gospodarczego* nr OPUS8 UMO-2014/15/B/HS4/04264.

\dot{L}/L (przy wydajności pracy y rosnącej do 0 przez 1 do $+\infty$) spada coraz wolniej od $+\infty$ przez n do 0. Przy przyjętych alternatywnych założeniach o trajektoriach liczby pracujących w pracy poszukuje się ścieżek wzrostu technicznego uzbrojenia pracy oraz wydajności pracy, a następnie porównuje się je ze ścieżkami wzrostu tych zmiennych makroekonomicznych z oryginalnego modelu Solowa.

Warto zaznaczyć, że rozważania na zbliżony temat były już podejmowane w literaturze. Zgodnie z wpływową koncepcją Malthusa geometryczny wzrost liczby ludności uniemożliwiał zwiększanie wydajności pracy w długim okresie. Współcześnie szereg ekonomistów próbuje wyjaśnić na gruncie modeli formalnych ewolucję liczby pracujących (malejące tempo przyrostu) i poziomu wydajności pracy w gospodarkach post-malthuzjańskich.

Guerrini (2006) (por. też Zawadzki 2007 lub Bucci, Guerrini 2009) wykazał, że jeśli w modelu Solowa przyjmie się założenie, że stopa wzrostu liczby pracujących $\dot{L}(t)/L(t) = \lambda(t)$ charakteryzuje się tym, że dla dowolnego nieujemnego momentu t $0 \leq \lambda(t) \leq \lambda^*$ oraz $\lim_{t \rightarrow +\infty} \lambda(t) = \lambda_\infty \in [0, \lambda^*]$, to równanie różniczkowe:

$\dot{k}(t) = sf(k(t)) - (\delta + \lambda(t))k(t)$ opisujące proces akumulacji technicznego uzbrojenia pracy w modelu Solowa posiada asymptotycznie stabilny, nietrywialny punkt stacjonarny.

Struktura prezentowanego opracowania jest następująca. W punkcie 2 znajduje się przegląd literatury. W punkcie 3 zaprezentowano rozwiązania modelu Solowa przy alternatywnych założeniach dotyczących trajektorii liczby pracujących. W punkcie 4 skalibrowano parametry modelu oraz przedstawiono symulacje numeryczne ścieżek wzrostu wydajności pracy przy różnych stopach inwestycji. Opracowanie kończy punkt 5, w którym zebrane zostały najważniejsze wnioski płynące z rozważań podjętych w pracy.

2. PRZEGLĄD LITERATURY

Między zjawiskami wzrostu gospodarczego i zmian liczby pracujących występują złożone, dwustronne zależności, będące przedmiotem zainteresowania m.in. ekonomii populacji oraz teorii wzrostu gospodarczego (por. Isaac, Lui 1997). W ekonomii neoklasycznej, która abstrahuje od kwestii bezrobocia w długookresowych analizach wzrostu gospodarczego, liczba pracujących wiąże się blisko z liczbą ludności ogółem w danym kraju. Stąd zjawiska zmian demograficznych i wzrostu gospodarczego są łączone teoretycznie i formalnie w sposób endogeniczny za sprawą takich mechanizmów jak: zmiany płodności i długości życia, migracje, czy inwestycje w kapitał ludzki.

Wpływowe dla ewolucji teorii w tym obszarze były ustalenia ekonomistów klasycznych, w tym Thomasa Malthusa i Davida Ricardo (za Isaac, Lui 1997). Koncepcja Malthusa, rozwinięta dalej w modelach ricardiańskich, wskazywała, w jaki sposób rzeczywiste tempo przyrostu naturalnego, w odróżnieniu od tempa potencjalnego, zależy od stanu gospodarki. Malthus argumentował bowiem, że społeczeństwa mają potencjał oraz naturalną skłonność do osiągnięcia wzrostu populacji w tempie geometrycznym (tj. wg stałej stopy wzrostu). Jednak w rzeczywistości liczba ludności nie rośnie do nieskończoności, gdyż jest ograniczana przez zmieniające się warunki ekonomiczne związane przede wszystkim z poziomem płac i podażą żywności. Obserwacja empiryczna skłoniła go do uznania, iż produkcja żywności może rosnąć jedynie w sposób arytmetyczny za sprawą ograniczonej ilości dostępnej ziemi i wolnego postępu technicznego w rolnictwie.

Zmiany podaży żywności w połączeniu z dynamiką liczby ludności oddziałują na płace realne. Ich spadek poniżej poziomu egzystencji (ang. *subsistence wage*) stanowi bodziec do ograniczenia tempa przyrostu naturalnego – w pierwszej kolejności za sprawą spadku dzietności. W ujęciu Malthusa dzieci były traktowane jako dobra inwestycyjne, zaś spadek płac umniejszał korzyści z ich posiadania. Natomiast w skrajnych przypadkach liczba ludności jest regulowana od góry przez wzrost śmiertelności wywołany głodem, wojnami lub epidemiami. Ustalenia Malthusa można podsumować następująco:

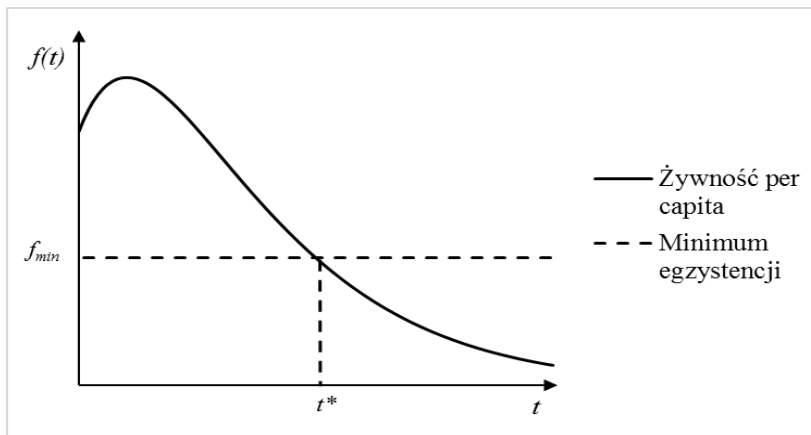
a. Potencjalny wzrost liczby ludności, $N(t)$, jest dany rosnącą funkcją wykładniczą: $N(t) = N_0 e^{nt}$, gdzie $N_0, n > 0$, przy czym N_0 jest liczbą ludności w momencie $t = 0$, zaś n (stałą w czasie) stopą wzrostu liczby ludności.

b. Podaż żywności, $F(t)$, jest określona rosnącą funkcją liniową: $F(t) = F_0 + at$, gdzie $F_0, a > 0$, przy czym F_0 oznacza podaż żywności w momencie $t = 0$, natomiast a – wzrost owej podaży w kolejnych momentach t .

c. Stąd, ilość żywności przypadająca na mieszkańca jest równa: $f(t) = \frac{F_0 + at}{N_0 e^{nt}}$. Nie może jednak ona trwale spaść poniżej pewnego minimalnego

poziomu f_{min} . Przykładowy przebieg funkcji $f(t)$ przedstawiono na wykresie 1. Po przekroczeniu momentu t^* dostępna podaż żywności nie zapewni egzystencji rosnącej populacji, co wymusi zmiany w poziomie lub tempie wzrostu $N(t)$. Na skutek tych dostosowań po pewnym czasie wartości funkcji $f(t)$ powrócą powyżej f_{min} .

Powyższe zależności, które faktycznie przystają empirycznie do historii ludzkości aż do czasów rewolucji przemysłowej, prowadzą do tzw. pułapki mal-tuzjańskiej. Wolny postęp techniczny w rolnictwie nie pozwala na zwiększenie produkcji żywności szybsze od przyrostu ludności. W rezultacie długookresowy poziom życia ludności jest stały, a obserwowane mogą być jedynie fluktuacje wokół poziomu równowagi.



Wykres 1. Zmiany podaży żywności *per capita* na gruncie teorii Malthusa

Źródło: opracowanie własne.

Przewidywania Malthusa przestały pasować do rzeczywistych zmian populacji i poziomu życia w XIX wieku. W krajach uprzemysłowionych to zdolności produkcyjne, także dotyczące podaży żywności, rosły geometrycznie, podczas gdy przyrost naturalny wyhamował, a liczba ludności wielu państw wręcz ustabilizowała się. Z jednej strony wystąpiły istotne zmiany w naturze gospodarowania, a akumulacja kapitału i postęp techniczny umożliwiły wzrost gospodarczy. Z drugiej strony wystąpiły tzw. przejścia demograficzne, które polegały na spadku śmiertelności, a następnie na znacznym ograniczeniu dzietności w krajach uprzemysłowionych. W odróżnieniu od teorii Malthusa po 1800 roku obserwowano zatem malejącą dzietność i wysokie tempo wzrostu gospodarczego. W ekonomii podejmuje się próby wyjaśnienia współczesnych powiązań między tymi zjawiskami, jak i teoretycznego połączenia obu etapów rozwoju ludzkości: malthuzjańskiego i post-malthuzjańskiego (Galor 2005).

W neoklasycznych modelach wzrostu gospodarczego (np. Solow 1956; Mankiw, Romer i Weil 1990) przyrost liczby pracujących jest określony egzogenicznie – liczba pracujących rośnie według stałej stopy wzrostu $n > 0$. Przyjmowanie funkcji produkcji o stałych efektach skali powoduje, że parametr n nie wpływa na stopę wzrostu wydajności pracy w długookresowej równowadze modelu. Ta ostatnia jest bowiem równa stopie postępu technicznego g . Tempo wzrostu liczby pracujących oddziałuje natomiast negatywnie na poziom technicznego uzbrojenia pracy i wydajności pracy w danym momencie czasu.

W teorii wzrostu endogenicznego liczba pracujących jest ściśle związana z dynamiką gospodarki. Dzieje się tak za sprawą efektów skali (por. Lucas 1988; Romer 1990; Tokarski 2011) lub mechanizmów odwołujących się *explicite* do zjawisk demograficznych. W pierwszym przypadku tempo wzrostu liczby pracu-

jących jest nadal wartością określoną w sposób egzogeniczny wobec procesów gospodarczych, jednakże wzrost zatrudnienia może wywołać rosnące korzyści skali, które przyspieszają wzrost wydajności pracy.

W modelu Lucasa (1988) głównym czynnikiem wzrostu jest akumulacja kapitału ludzkiego, który generuje korzyści zewnętrzne. Gruescu (za: Prettner, Prskawetz 2010) pokazał, że przyjęcie w modelu Lucasa międzyokresowej funkcji użyteczności typu CES, prowadzi do następującej stopy wzrostu wydajności pracy w równowadze:

$$g_y^* = \frac{1}{\sigma}(E - \delta - \rho + n),$$

gdzie: $\frac{1}{\sigma}$ – oznacza międzyokresową elastyczność substytucji; E – produktywność sektora edukacji; δ – stopę deprecjacji kapitału ludzkiego; ρ – stopę dyskonta.

Z powyższej zależności wynika, że im szybsze jest tempo przyrostu naturalnego, tym szybszy jest wzrost wydajności pracy w równowadze. Do podobnych wniosków prowadzi analiza innych modeli z endogenicznie określonym postępowaniem technicznym. Zarówno w modelu Romera 1990 (głównym czynnikiem wzrostu jest działalność sektora B+R), jak i Grossmana i Helpmana (działalność innowacyjna poszczególnych firm) stopa wzrostu wydajności pracy w długookresowej równowadze jest rosnącą funkcją zasobu liczby pracujących (por. Prettner, Prskawetz 2010).

Ciekawe rozwinięcie modelu Romera o czynniki demograficzne stanowi praca Prettnera (2009), która dopuszcza starzenie się populacji. Wynikający z tego wzrost wydajności pracy w równowadze zależy nie tylko od liczby pracujących (dodatnio), ale również od przeciętnej długości życia (również dodatnio). Przyjmuje się bowiem, że dłuższe oczekiwane życie sprzyja wzrostowi indywidualnych oszczędności, które stymulują wzrost gospodarczy.

Tokarski (2008) rozwija neoklasyczny model Solowa o efekty skali i pokazuje, że wpływ liczby pracujących na tempo wzrostu wydajności pracy w długookresowej równowadze zależy w tym od kierunku efektów skali w gospodarce. Przy rosnących efektach skali, im wyższe jest tempo wzrostu liczby pracujących, tym szybszy jest wzrost wydajności pracy. Odwrotny kierunek zależności występuje natomiast przy malejących efektach skali (rozumowanie to i płynące z niego wnioski można łatwo uogólnić na więcej niż jednokapitałowe, neoklasyczne modele wzrostu typu Bankiwa–Romera–Weila lub Nonnemana–Vanhoudta – por. Tokarski 2008, 2011).

Bardziej złożonych wniosków dostarczają modele, które endogenizują jednocześnie: wzrost gospodarczy i zmiany liczby pracujących. Barro i Sala-i-Martin (2004) przedstawiają trzy przykłady takich mechanizmów związane

z migracjami, płodnością i wyborem podaży pracy jednostki. W pierwszym przypadku, zmiany liczby pracujących zależą od międzynarodowych różnic w wynagrodzeniach pracowników. Pracownicy migrują do krajów o wysokich płacach, przenosząc ze sobą zakumulowany kapitał ludzki. Autorzy pokazują, m.in. rozszerzając model Solowa oraz analizując dane empiryczne, że międzynarodowe przepływy pracowników sprzyjają wyrównywaniu poziomu rozwoju między krajami.

W drugim wariacie Barro i Sala-i-Martin uwzględniają decyzje dotyczące liczby dzieci, aby wyjaśnić ewolucję gospodarek post-malthuzjańskich. W tym modelu, posiadanie dzieci stanowi koszt alternatywny względem uzyskiwania dochodów rynkowych. W konsekwencji, wraz ze wzrostem gospodarczym, który prowadzi do bogacenia się społeczeństw, rodziny będą decydowały się na posiadanie mniejszej liczby dzieci. Natomiast w wariacie trzecim, spadające tempo wzrostu zasobu pracy można przypisać malejącej aktywności zawodowej. Wraz z bogaceniem się rośnie preferencja czasu wolnego względem dochodów, co powoduje ograniczenie przeciętnej liczby godzin pracy. Spadek ten zachodzi jednak tylko do pewnego momentu, w którym użyteczność czasu wolnego i dochodów zrównuje się na długookresowej ścieżce wzrostu.

Opisywane modele wzrostu gospodarczego pasują do specyfiki gospodarowania współczesnego kapitalizmu. Tymczasem przedstawiciele tzw. jednolitej teorii wzrostu podejmują próby jednoczesnego wyjaśnienia złożonych i ewoluujących na przestrzeni wieków zależności między zmianami populacji a wzrostem gospodarczym (Malaga 2013). W ramach koncepcji Galora (2005) eksploracji podlegają takie zjawiska jak: pułapka malthuzjańska, przyspieszenie wzrostu w okresie industrializacji, przejścia demograficzne oraz trwały wzrost gospodarczy od XIX wieku.

W modelu występuje ukryta zmienna stanu, którą jest popyt na kapitał ludzki. Oddziałuje ona na zachowanie układu dynamicznego, czemu odpowiadają przejścia do kolejnych reżimów wzrostu: od malthuzjańskiego, przez post-malthuzjański do współczesnego. Wzrost populacji, początkowo stanowiący barierę dla zmian poziomu rozwoju, w pewnym momencie wyzwala postęp techniczny, za sprawą podziału pracy, innowacji, czy wzrostu popytu. Dzięki temu następuje przejście do etapu post-malthuzjańskiego, który cechuje się jednocześnie wysoką dynamiką wzrostu gospodarczego i przyrostu naturalnego. Z czasem, pojawia się popyt na wykwalifikowanych pracowników, co oznacza, że rodzicom opłaca się inwestować w rozwój kapitału ludzkiego swoich dzieci (a nie, jak dotąd, w liczbę dzieci). Malejąca, w rezultacie, przeciętna liczba dzieci w rodzinach stanowi przejście demograficzne i prowadzi do współczesnego reżimu wzrostu, z wysokimi inwestycjami w kapitał ludzki i słabym przyrostem naturalnym.

3. ŚCIEŻKI WZROSTU W MODELU SOŁOWA PRZY ALTERNATYWNYCH TRAJEKTORIACH LICZBY PRACUJĄCYCH

W prowadzonych dalej rozważaniach przyjmuje się następujące założenia dotyczące funkcjonowania gospodarki typu Solowa²:

I. Proces produkcyjny opisuje dwuczynnikowa funkcja produkcji Cobba–Douglasa dana wzorem³:

$$Y(t) = (K(t))^\alpha (L(t))^{1-\alpha}, \quad (1)$$

gdzie Y oznacza wielkość wytworzonego produktu, K – nakłady kapitału, L – nakłady pracy, $\alpha \in (0;1)$ jest zaś elastycznością produkcji względem nakładów kapitału.

II. Proces akumulacji kapitału opisuje następujące równanie różniczkowe:

$$\dot{K}(t) = sY(t) - \delta K(t), \quad (2)$$

gdzie s oznacza stopę oszczędności/inwestycji, δ zaś – stopę deprecjacji kapitału. Rzecz jasna zmienne s oraz δ należą do przedziału $(0;1)$.

III. Liczba pracujących zmienia się po jednej z trzech alternatywnych trajektorii⁴:

$$L(t) = e^{nt}, \quad (3)$$

$$L(t) = \frac{m}{1 + e^{2n(T-t)}} \quad (4)$$

² O wszystkich występujących dalej zmiennych makroekonomicznych przyjmuje się założenie, że są przynajmniej dwukrotnie różniczkowalnymi względem czasu $t \in [0; +\infty)$. Zapis $x(t)$

oznaczał będzie wartość zmiennej x w momencie t . $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$ to pierwsza pochodna zmiennej x po czasie t , czyli (ekonomicznie rzecz biorąc) przyrost wartości owej zmiennej w momencie t , zaś

$\ddot{x}(t) = \frac{d^2x}{dt^2}$ – druga pochodna x po t .

³ Oryginalna funkcja produkcji Comba–Douglasa opisana jest równaniem:

$Y = AK^\alpha L^{1-\alpha}$, gdzie $A > 0$ oznacza łączną produktywność czynników produkcji. Zakładamy jednak, że Y i K (wyrażone w jednostkach pieniężnych w pewnych cenach stałych) zdeflowane są takim delatorem, że w momencie $t=0$ Y i K (podobnie jak L) równe są 1 i wówczas $A=1$. Nie ogranicza to jednak w żaden sposób ogólności prowadzonych dalej rozumowań.

⁴ Równowaga Solowa przy trajektorii liczby pracujących opisanej przez równanie (4) analizowana była w opracowaniu Filipowicz, Syrka, Tokarskiego 2016.

lub

$$\frac{\dot{L}(t)}{L(t)} = \frac{n}{y(t)}, \quad (5)$$

gdzie: $n > 0$, $m \geq 2$ i $T \geq 0$, zaś $y = Y/L$ oznacza wydajność pracy.

Równanie (3) opisuje standardową ścieżkę wzrostu z oryginalnego modelu Solowa 1956. Na tej ścieżce wzrostu stopa wzrostu liczby pracujących \dot{L}/L w każdym momencie $t \in [0; +\infty)$ równa jest n , zaś liczba pracujących rośnie od 1 do $+\infty$.

Związek (4) wyznacza zaś logitową ścieżkę wzrostu liczby pracujących. Na ścieżce tej:

$$L(0) = 1 \Leftrightarrow e^{2nT} = m - 1,$$

co powoduje, że:

$$T = \frac{\ln(m-1)}{2n}. \quad (6)$$

Spełnienie warunku (6) gwarantuje, że na ścieżce wzrostu (4) liczba pracujących w momencie $t=0$ przyjmuje wartość 1. Dlatego też przyjmujemy dalej, że na logitowej trajektorii (4) zachodzi również zależność (6).

Ponadto z równań (4) i (6) wyciągnąć można następujące wnioski:

$$(i) \lim_{t \rightarrow +\infty} L(t) = m.$$

$$(ii) \forall t \in [0; +\infty) \dot{L}(t) = 2nm \frac{e^{2n(T-t)}}{(1 + e^{2n(T-t)})^2} > 0.$$

$$(iii) \forall t \in [0; +\infty) \ddot{L}(t) = 4n^2 m e^{2n(T-t)} \frac{e^{2n(T-t)} - 1}{(1 + e^{2n(T-t)})^3}, \text{ co powoduje, że } \ddot{L}(t) \text{ jest}$$

dotądnie dla⁵ $t \in (0; T)$ oraz ujemne dla $t \in (T; +\infty)$.

$$(iv) L(T) = m/2.$$

Oznacza to, że jeśli spełnione są równania (4) i (6), to liczba pracujących rośnie coraz szybciej od 1 do $m/2$ w przedziale czasu $(0; T)$, natomiast w przedziale $(T; +\infty)$ liczba ta rośnie coraz wolniej od $m/2$ do m . A zatem m jest

⁵ $T=0$ w przypadku, w którym $m=2$.

maksymalną liczbą pracujących na trajektorii (4), zaś T – momentem, w którym ścieżka ta ma punkt przegięcia.

Równanie (5) określa zaś post-maltuzjańską ścieżkę wzrostu liczby pracujących. Jeśli liczba pracujących porusza się po owej trajektorii, to stopa wzrostu liczby pracujących \dot{L}/L (przy wydajności pracy y rosnącej do 0 przez 1 do $+\infty$) spada coraz wolniej od $+\infty$ przez n do 0.

Oznaczmy też przez $k=K/L$ techniczne uzbrojenie pracy, natomiast przez $\lambda = \dot{L}/L$ stopę wzrostu liczby pracujących. Wówczas:

$$\lambda(t) = n, \quad (7)$$

przy standardowej trajektorii liczby pracujących,

$$\lambda(t) = 2n \frac{e^{2n(T-t)}}{1 + e^{2n(T-t)}}, \quad (8)$$

przy trajektorii logitowej oraz:

$$\lambda(t) = \frac{n}{y(t)}, \quad (9)$$

w przypadku trajektorii post-maltuzjańskiej.

Z równania (2) wyprowadzić można równanie Solowa postaci (por. np. Tokarski 2011):

$$\dot{k}(t) = sy(t) - \delta k(t) - \lambda(t)k(t), \quad (10)$$

zaś z funkcji produkcji Cobba–Douglasa (1) bezpośrednio uzyskujemy funkcję wydajności pracy:

$$y(t) = (k(t))^\alpha. \quad (11)$$

Ze związków (10–11) uzyskujemy równanie różniczkowe Bernoulliego dane wzorem:

$$\dot{k}(t) = s(k(t))^\alpha - \delta k(t) - \lambda(t)k(t). \quad (12)$$

Całki równania różniczkowego (12) spełniające warunek $k(0)=1$ wyznaczały będą ścieżki wzrostu technicznego uzbrojenia pracy przy alternatywnych trajektoriach liczby pracujących spełniających równania (7–9). Mając zaś te ścieżki wzrostu wyznaczyć będzie można z równania (11) również ścieżki wzrostu wydajności pracy.

Związki (7) i (12) prowadzą do następującego równania różniczkowego:

$$\dot{k}(t) = s(k(t))^\alpha - (\delta + n)k(t),$$

którego całka spełniająca warunek $k(0)=1$ dana jest wzorem:

$$k(t) = \left(\frac{s}{\delta + n} + \left(1 - \frac{s}{\delta + n} \right) e^{-(1-\alpha)(\delta+n)t} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}. \quad (13)$$

Wstawiając równanie (13) do funkcji wydajności pracy (11) dochodzimy do wniosku, iż ścieżkę wzrostu owej zmiennej makroekonomicznej opisuje równanie:

$$y(t) = \left(\frac{s}{\delta + n} + \left(1 - \frac{s}{\delta + n} \right) e^{-(1-\alpha)(\delta+n)t} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}. \quad (14)$$

Ścieżki wzrostu (13–14), opisujące trajektorie technicznego uzbrojenia pracy i wydajności pracy w modelu Solowa z funkcją produkcji Cobba–Douglasa, są jawnymi funkcjami elementarnymi. Zatem łatwo pokazać, że przy $s > \delta + n$ ($s < \delta + n$) w każdym nieujemnym momencie t pochodne $\dot{k}(t)$ i $\dot{y}(t)$ są dodatnie (ujemne), natomiast przy $s = \delta + n$ $\dot{k}(t) = \dot{y}(t) = 0$. Co więcej, w każdym ze

wspomnianych przypadków $\lim_{t \rightarrow +\infty} k(t) = \left(\frac{s}{\delta + n} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ oraz $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = \left(\frac{s}{\delta + n} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$.

Płyną stąd dwa następujące wnioski. Po pierwsze, jeżeli $s > \delta + n$ ($s < \delta + n$), to zarówno techniczne uzbrojenie pracy $k(t)$, jak i wydajność pracy $y(t)$ rośnie

(maleje) od 1 do $\left(\frac{s}{\delta + n} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ oraz $\left(\frac{s}{\delta + n} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$. Po drugie, przy $s = \delta + n$

w każdym nieujemnym momencie t owe zmienne makroekonomiczne przyjmują wartości równe 1.

Natomiast z równań (8) i (12) dochodzimy do następującego równania różniczkowego:

$$\dot{k}(t) = s(k(t))^\alpha - \delta k(t) - 2n \frac{e^{2n(T-t)}}{1 + e^{2n(T-t)}} k(t). \quad (15)$$

Można pokazać (Filipowicz, Syrek, Tokarski 2016), że całkę równania różniczkowego (15) określa związek:

$$k(t) = \left[\frac{s}{\delta} \left(1 + (m-1)e^{-2nt} \right)^{1-\alpha} \cdot {}_2F_1 \left(-\frac{(1-\alpha)\delta}{2n}, 1-\alpha; \frac{2n-(1-\alpha)\delta}{2n}; -(m-1)e^{-2nt} \right) + C(1-\alpha)s \left(\frac{1+(m-1)e^{-2nt}}{e^{\delta t}} \right)^{1-\alpha} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad (16)$$

gdzie ${}_2F_1(a, b; c; z)$ oznacza funkcję hipergeometryczną Gaussa⁶, zaś $C \in \mathbb{R}$ jest stałą całkowania⁷. Wstawiając zaś całkę (16) do funkcji wydajności pracy (11) mamy:

⁶ Funkcja hipergeometryczna ${}_2F_1(a, b; c; z)$ jest nieelementarną funkcją będącą rozwiązaniem równania różniczkowego drugiego rzędu Gaussa postaci:

$$z(1-z) \frac{d^2 w}{dz^2} + (c - (a+b+1)z) \frac{dw}{dz} = abw(z),$$

gdzie a, b są dowolnymi stałymi rzeczywistymi, zaś $c \neq 0$. Funkcję tę można zapisać wzorem:

$${}_2F_1(a, b; c; z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n z^n,$$

przy:

$$\gamma_n = \frac{\left(\prod_{j=1}^n (a+j-1) \right) \left(\prod_{j=1}^n (b+j-1) \right)}{n! \left(\prod_{j=1}^n (c+j-1) \right)}.$$

Właściwości matematyczne owej funkcji scharakteryzowane są np. w pracach Korn i Korn 1983, s. 269 (i dalsze) lub Cattani 2006. Natomiast jej wykorzystanie w modelowaniu procesów wzrostu gospodarczego na gruncie tzw. modelu Lucasa-Uzawy znajduje się w opracowaniach Boucekkine, Ruiz-Tamarit 2004, 2008 i Zawadzkiego 2015, na gruncie modelu Solowa w pracy Guerriniego 2006 lub na gruncie modelu Mankiwa, Romera, Weila w opracowaniu Krawca, Szydłowskiego 2002.

⁷ Stała całkowania C w równaniach (16–17) dobrana będzie w prezentowanych dalej symulacjach numerycznych tak, by spełniony był warunek $k(0) = y(0) = 1$.

$$y(t) = \left[\frac{s}{\delta} \left(1 + (m-1)e^{-2nt} \right)^{1-\alpha} \cdot {}_2F_1 \left(-\frac{(1-\alpha)\delta}{2n}, 1-\alpha; \frac{2n-(1-\alpha)\delta}{2n}; -(m-1)e^{-2nt} \right) + C(1-\alpha)s \left(\frac{1+(m-1)e^{-2nt}}{e^{\delta t}} \right)^{1-\alpha} \right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}. \quad (17)$$

Związki (16–17) wyznaczają ścieżki wzrostu technicznego uzbrojenia pracy i wydajności pracy z logitową funkcją liczby pracujących (4). Ścieżki te są funkcjami nieelementarnymi i z tego względu ich kształt analizowany będzie w części opisującej wyniki symulacji numerycznych.

Należy jednak zauważyć, że przy $t \rightarrow +\infty$ spełniony jest związek:

$$\begin{aligned} & {}_2F_1 \left(-\frac{(1-\alpha)\delta}{2n}, 1-\alpha; \frac{2n-(1-\alpha)\delta}{2n}; -(m-1)e^{-2nt} \right) \rightarrow \\ & {}_2F_1 \left(-\frac{(1-\alpha)\delta}{2n}, 1-\alpha; \frac{2n-(1-\alpha)\delta}{2n}; 0 \right) = 1, \end{aligned}$$

co powoduje, że zgodnie z równaniami (16–17) zachodzi: $k(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{s}{\delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ oraz

$y(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{s}{\delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$. Wielkości $\left(\frac{s}{\delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ i $\left(\frac{s}{\delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$ wyznaczają (odpowiednio) długo-

gookresowe techniczne uzbrojenie pracy oraz wydajność pracy w modelu Solowa ze ścieżką wzrostu liczby pracujących określoną przez funkcję logitową (4).

Ponieważ $\left(\frac{s}{\delta} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} > \left(\frac{s}{\delta+n} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ oraz $\left(\frac{s}{\delta} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} > \left(\frac{s}{\delta+n} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$, zatem wielkości te są wyższe, niż w analogicznym, oryginalnym modelu Solowa (z funkcją produkcji Comba–Douglasa).

Przejdźmy teraz do analizy modelu Solowa z post-maltuzjańską ścieżką wzrostu liczby pracujących opisaną przez równanie (5). Wstawiając funkcję wydajności pracy (11) do związku (9), mamy:

$$\lambda(t) = n(k(t))^{-\alpha},$$

co, po uwzględnieniu równania Solowa (12), daje następujące równanie różniczkowe:

$$\dot{k}(t) = (k(t))^\alpha \left(s - \delta(k(t))^{1-\alpha} - n(k(t))^{1-2\alpha} \right). \quad (18)$$

Równanie różniczkowe będzie analizowane w przestrzeni fazowej $P = (0; +\infty)$. Dla dowolnego $k \in P$ $\text{sgn} \dot{k} = \text{sgn} \phi(k)$, gdzie:

$$\phi(k) = s - \delta k^{1-\alpha} - nk^{1-2\alpha}. \quad (19)$$

Właściwości zaś funkcji (19) należy rozpatrywać dla $\alpha \in (0; \frac{1}{2})$, $\alpha = \frac{1}{2}$ oraz $\alpha \in (\frac{1}{2}; 1)$, gdyż inne są wówczas znaki wyrażeń $1 - \alpha$ oraz $1 - 2\alpha$ a (tym samym) inaczej zachowują się pochodne $\phi'(k)$ dla kolejnych $k \in P$.

Przy $\alpha \in (0; \frac{1}{2})$ mamy:

(i) $\phi(0) = s > 0$;

(ii) $\lim_{k \rightarrow +\infty} \phi(k) = -\infty$;

(iii) $\forall k \in P \phi'(k) < 0$.

a zatem (zgodnie z własnością Darboux funkcji ciągłej) istnieje wówczas dokładnie jedno $\bar{k} \in P$, takie, że $\forall k \in (0; \bar{k}) \phi(k) > 0$, $\phi(\bar{k}) = 0$ oraz $\forall k \in (\bar{k}; +\infty) \phi(k) < 0$. Płynie stąd wniosek, że owo \bar{k} jest nietrywialnym, stabilnym punktem stacjonarnym równania różniczkowego (18). Co więcej, jeśli $s > \delta + n$ ($s < \delta + n$), to $\phi(1) > 0$ ($\phi(1) < 0$) i wówczas w każdym momencie $t \in [0; +\infty)$ $\dot{k}(t) > 0$ ($\dot{k}(t) < 0$), co implikuje, że ścieżka wzrostu technicznego uzbrojenia pracy $k(t)$ dąży do \bar{k} z lewej (prawej) strony⁸. Natomiast przy $s = \delta + n$ zachodzi $\dot{k} = 0$, co powoduje, że wówczas w każdym nieujemnym momencie t $k(t) = \bar{k} = 1$.

Przy $\alpha = \frac{1}{2}$ funkcję $\phi(k)$ możemy zapisać następująco:

$$\phi(k) = s - n - \delta \sqrt{k}.$$

Wówczas:

(i) $\phi(0) = s - n$;

(ii) $\lim_{k \rightarrow +\infty} \phi(k) = -\infty$;

(iii) $\forall k \in P \phi'(k) < 0$.

⁸ Ponieważ z równania (11) wynika, że $\text{sgn} \dot{k} = \text{sgn} \dot{y}$, zatem ścieżka wzrostu wydajności pracy $y(t)$ zachowuje się analogicznie do ścieżki wzrostu $k(t)$, z tą różnicą, że przy $t \rightarrow +\infty$ $y(t) \rightarrow \bar{y} = (\bar{k})^\alpha$.

Dlatego też:

(i) Jeżeli $s \leq n$, to równanie różniczkowe (18) nie ma punktu stacjonarnego w przestrzeni fazowej P , gdyż przy k rosnącym od 0 do $+\infty$ wartości funkcji $\phi(k)$ spadają od $s-n \leq 0$ do $-\infty$. Dlatego też w tym przypadku $\forall k \in P \dot{k} < 0$, czyli wartości technicznego uzbrojenia pracy spadają wówczas od 1 do 0⁹.

(ii) Natomiast przy $s > n$ istnieje dokładnie jeden nietrywialny, stabilny punkt stacjonarny $\bar{k} \in P$ i ścieżki wzrostu technicznego uzbrojenia pracy oraz wydajności pracy zachowują się jak przy $\alpha \in (0; 1/2)$.

Weźmy teraz $\alpha \in (1/2; 1)$. W tym przypadku mamy:

$$(i) \lim_{k \rightarrow 0^+} \phi(k) = -\infty;$$

$$(ii) \lim_{k \rightarrow +\infty} \phi(k) = -\infty;$$

(iii) oraz:

$$\phi'(k) = n(2\alpha - 1)k^{-2\alpha} - \delta(1 - \alpha)k^{-\alpha},$$

co powoduje, że dla $k \in (0; \bar{k})$, gdzie:

$$\bar{k} = \left(\frac{(2\alpha - 1)n}{(1 - \alpha)\delta} \right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad (20)$$

pochodna $\phi'(k)$ jest dodatnia, przy $k = \bar{k}$ – równa jest 0, zaś dla $k \in (\bar{k}; +\infty)$ pochodna $\phi'(k)$ jest ujemna. Dlatego też w przedziale $(0; \bar{k})$ funkcja $\phi(k)$ jest funkcją rosnącą, zaś w przedziale $(\bar{k}; +\infty)$ – funkcją malejącą.

(iv) Jeżeli $\phi(\bar{k}) < 0$, to dla każdego $k \in P \dot{k} = k^\alpha \phi(k) < 0$ i wówczas techniczne uzbrojenie pracy oraz wydajność pracy spadają (wraz z upływem czasu) od 1 do 0.

(v) Jeśli $\phi(\bar{k}) = 0$ to $\bar{k} \in P$ jest punktem stacjonarnym równania różniczkowego (18). Wówczas, jeśli $\bar{k} < 1$, to $k(t)$ spada od 1 do \bar{k} , natomiast $y(t)$ spada od 1 do $(\bar{k})^\alpha$. Przy $\bar{k} = 1$ w każdym nieujemnym momencie $t \dot{k}(t) = \dot{y}(t) = 0$ i $k(t) = y(t) = 1$. Natomiast przy $\bar{k} > 1$ zachodzi $\dot{k}(t), \dot{y}(t) < 0$ i wartości technicznego uzbrojenia pracy i wydajności pracy spadają od 1 do 0.

⁹ Rzecz jasna, analogicznie kształtują się wówczas również wartości wydajności pracy $y(t)$.

(vi) W przypadku, w którym $\phi(\bar{k}) > 0$ równanie różniczkowe (18) ma dwa nietrywialne punkty stacjonarne: $\bar{k}_1 \in (0; \bar{k})$ i $\bar{k}_2 \in (\bar{k}; +\infty)$. Wówczas dla dowolnych $k \in (0; \bar{k}_1) \cup (\bar{k}_2; +\infty)$ $\dot{k}(t), \dot{y}(t) < 0$, zaś dla każdego $k \in (\bar{k}_1; \bar{k}_2)$ $\dot{k}(t), \dot{y}(t) > 0$. Płyne stąd wniosek, że punkt \bar{k}_1 jest niestabilnym punktem stacjonarnym, zaś \bar{k}_2 – stabilnym punktem stacjonarnym. Dlatego też wówczas:

(a) jeżeli $\bar{k}_1 > 1$, to techniczne uzbrojenie pracy i wydajność pracy spadają od 1 do 0;

(b) przy $\bar{k}_1 = 1$ wartości owych zmiennych makroekonomicznych w każdym momencie $t \in [0; +\infty)$ równe są 1;

(c) jeśli $\bar{k}_1 < 1 < \bar{k}_2$ $k(t)$ oraz $y(t)$ rosną od 1 do (odpowiednio) \bar{k}_2 i $(\bar{k}_2)^\alpha$;

(d) w przypadku, w którym $\bar{k}_2 = 1$ w każdym momencie t $k(t)=y(t)=1$;

(e) natomiast przy $\bar{k}_2 < 1$ techniczne uzbrojenie pracy i wydajność pracy spadają od 1 do \bar{k}_2 i $(\bar{k}_2)^\alpha$.

Z równań (19–20) wynika zaś, że:

$$\phi(\bar{k}) = s - \delta \left(\frac{(2\alpha - 1)n}{(1 - \alpha)\delta} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} - n \left(\frac{(1 - \alpha)\delta}{(2\alpha - 1)n} \right)^{\frac{2\alpha-1}{\alpha}},$$

co powoduje, że:

(i) jeśli $s > \delta \left(\frac{(2\alpha - 1)n}{(1 - \alpha)\delta} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} + n \left(\frac{(1 - \alpha)\delta}{(2\alpha - 1)n} \right)^{\frac{2\alpha-1}{\alpha}}$, to równanie różniczkowe (18) ma dwa nietrywialne punkty stacjonarne;

(ii) przy $s = \delta \left(\frac{(2\alpha - 1)n}{(1 - \alpha)\delta} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} + n \left(\frac{(1 - \alpha)\delta}{(2\alpha - 1)n} \right)^{\frac{2\alpha-1}{\alpha}}$ równanie to ma jeden nietrywialny punkt stacjonarny;

(iii) natomiast przy $s < \delta \left(\frac{(2\alpha - 1)n}{(1 - \alpha)\delta} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} + n \left(\frac{(1 - \alpha)\delta}{(2\alpha - 1)n} \right)^{\frac{2\alpha-1}{\alpha}}$ nie ma ono nietrywialnych punktów stacjonarnych.

4. KALIBRACJA PARAMETRÓW MODELU I SYMULACJE NUMERYCZNE

Podobnie jak w pracach Filipowicz, Tokarskiego (2015), Filipowicz, Wisły, Tokarskiego (2015) lub Filipowicz, Syrka, Tokarskiego (2016) autorzy skalibrowali elastyczność produkcji względem nakładów kapitału (czyli α) na takim poziomie, by przy relacji technicznego uzbrojenia pracy w dwóch gospodarkach równej 5 stosunek wydajności pracy wynosił 3. Wówczas przy funkcji wydajności pracy (11) mamy¹⁰:

$$\alpha = \frac{\ln(y_1/y_2)}{\ln(k_1/k_2)} = \frac{\ln 3}{\ln 5} \approx 0,68261.$$

Ponadto arbitralnie przyjęto, że $\delta=0,07$, $n=0,01$ oraz $m=e$, gdzie e jest liczbą Eulera ($e \approx 2,7182818$). Wówczas moment T przy logitowej ścieżce wzrostu liczby pracujących równy jest $T = \frac{\ln(e-1)}{0,02} \approx 27,066$. Stopę inwestycji zmieniało co 10 punktów procentowych od 10% do 40%. 10% stopy inwestycji nazywane będą dalej niskimi stopami inwestycji, 20% – średnimi, 30% – wysokimi, 40% zaś – bardzo wysokimi stopami inwestycji.

Tablica 1. Symulacje wydajność pracy przy standardowej (y_1), logitowej (y_2) oraz post-maltuzjańskiej (y_3) trajektorii liczby pracujących i przy $\delta=0,07$, $n=0,01$, $\alpha \approx 0,68261$ i $m=e$

Rok t	Stopa inwestycji s (%)											
	10			20			30			40		
	y_1	y_2	y_3	y_1	y_2	y_3	y_1	y_2	y_3	y_1	y_2	y_3
10	1,124	1,110	1,131	1,866	1,845	1,889	2,810	2,781	2,810	3,963	3,924	3,889
20	1,226	1,207	1,253	2,738	2,701	2,882	4,908	4,846	5,125	7,762	7,672	7,991
50	1,428	1,437	1,536	4,825	4,866	5,565	10,451	10,548	12,033	18,431	18,609	21,072
75	1,514	1,587	1,680	5,868	6,151	7,079	13,385	14,030	16,180	24,258	25,425	29,221
100	1,562	1,716	1,762	6,463	7,090	8,018	15,093	16,548	18,832	27,686	30,345	34,514
150	1,601	1,912	1,822	6,970	8,310	8,880	16,565	19,732	21,358	30,655	36,503	39,629
200	1,612	2,033	1,831	7,117	8,969	9,147	16,990	21,399	22,188	31,516	39,682	41,346
$+\infty$	1,616	2,153	1,896	7,175	9,562	9,233	17,161	22,870	22,573	31,860	42,459	42,163

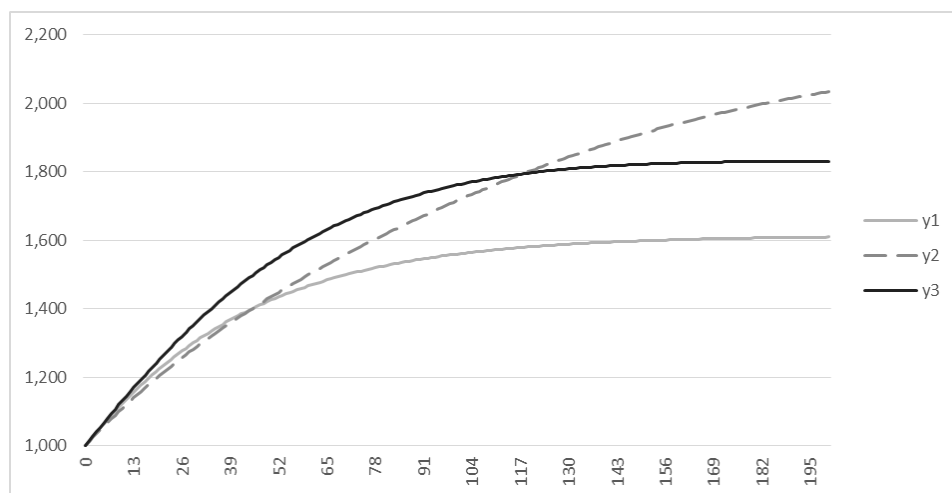
Źródło: opracowanie własne.

¹⁰ Gdyby (zgodnie z dekompozycją Solowa 1957) przyjęć, że $\alpha = \frac{1}{3}$, to przy $k_1/k_2=5$ otrzymuje się: $\frac{y_1}{y_2} = \sqrt[3]{\frac{k_1}{k_2}} = \sqrt[3]{5} \approx 1,70998$, co wydaje się wielkością mocno niedoszacowaną.

W tabelicy 1 znajdują się wyniki symulacji numerycznych wydajności pracy w czterech wyróżnionych wariantach stóp inwestycji przy założeniu standardowej (y_1), logitowej (y_2) oraz post-maltuzjańskiej (y_3) trajektorii liczby pracujących. We wszystkich wariantach symulacyjnych przyjęto, iż w momencie początkowym ($t=0$) kapitał na pracującego i wydajność pracy jest równa 1. Ponadto na wykresach 2–5 przedstawiono trajektorie odpowiednich wydajności pracy przy 10%, 20%, 30% i 40% stopie inwestycji¹¹.

Na podstawie wyników przeprowadzonych przez autorów symulacji numerycznych można wyciągnąć następujące wnioski:

- Jeżeli przyjmiemy, że gospodarkę cechują niskie stopy inwestycji (na poziomie 10%), długookresowa wydajność pracy w tej gospodarce będzie o około 60% wyższa (przy założeniu standardowej trajektorii liczby pracujących), o około 90% wyższa (przy założeniu post-maltuzjańskiej trajektorii liczby pracujących) i o około 115% wyższa niż w momencie początkowym (przy założeniu logitowej trajektorii liczby pracujących, por. wykres 2).



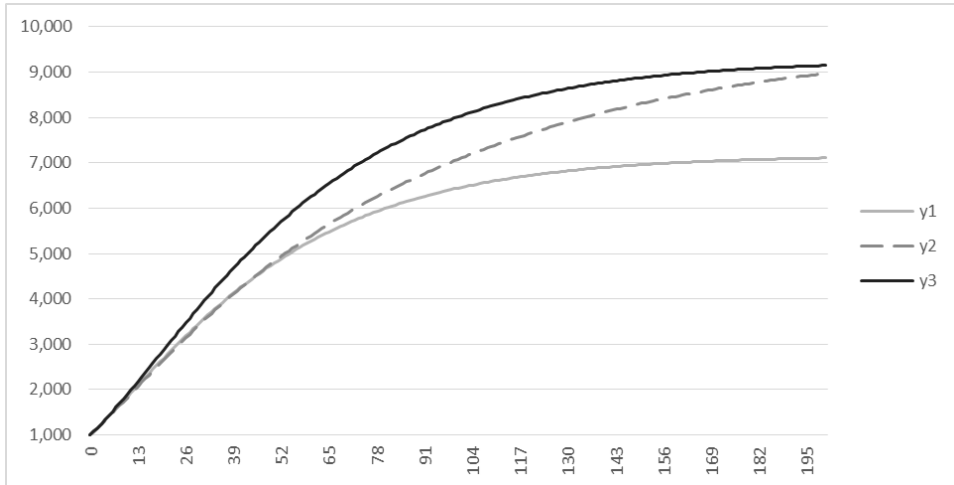
Wykres 2. Ścieżki wzrostu wydajności pracy przy standardowej (y_1), logitowej (y_2) oraz post-maltuzjańskiej (y_3) trajektorii liczby pracujących i $s=10\%$

Źródło: opracowanie własne.

- Jeżeli zaś założymy, że gospodarka charakteryzuje się średnimi stopami inwestycji i w momencie początkowym cechowała się wydajnością pracy równą 1, wówczas w długim okresie w przypadku standardowej trajektorii liczby pracują-

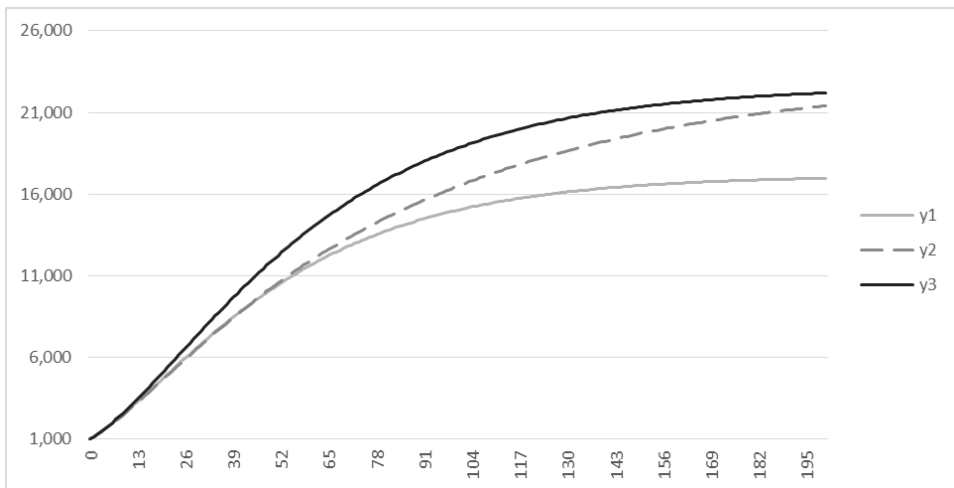
¹¹ Kształt ścieżek wzrostu technicznego uzbrojenia pracy jest bardzo zbliżony do kształtu ścieżek wzrostu wydajności pracy.

cych wydajność pracy ustabilizuje się na poziomie 7,175, w przypadku trajektorii post-maltuzjańskiej na poziomie 9,233 oraz w przypadku trajektorii logitowej na poziomie 9,562 (por. wykres 3).



Wykres 3. Ścieżki wzrostu wydajności pracy przy standardowej (y_1), logitowej (y_2) oraz post-maltuzjańskiej (y_3) trajektorii liczby pracujących i $s=20\%$

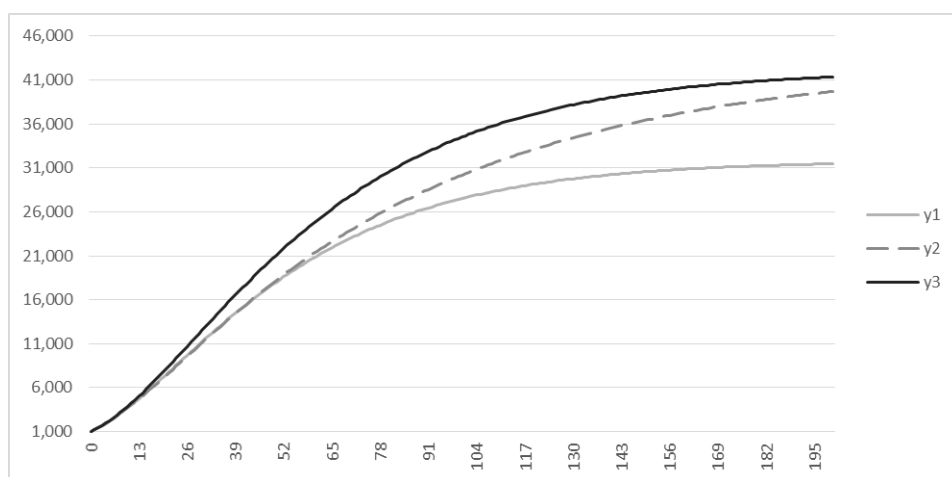
Źródło: opracowanie własne.



Wykres 4. Ścieżki wzrostu wydajności pracy przy standardowej (y_1), logitowej (y_2) oraz post-maltuzjańskiej (y_3) trajektorii liczby pracujących i $s=30\%$

Źródło: opracowanie własne.

- Przy rozważaniu wariantu z wysokimi stopami inwestycji w dwustuletnim horyzoncie czasowym wydajność pracy zwiększy się do poziomu 16,990 (przy standardowej trajektorii liczby pracujących), do poziomu 22,188 (przy post-maltuzjańskiej trajektorii) oraz do poziomu 21,399 (przy logitowej trajektorii, por. wykres 4).
- Przy założeniu, że gospodarka będzie wyróżniać się bardzo wysokimi stopami inwestycji, dochodzimy do wniosku, że wydajność pracy ustabilizuje się wówczas na poziomie 31,860 przy standardowej ścieżce wzrostu liczby pracujących, na poziomie 42,163 przy ścieżce post-maltuzjańskiej oraz na poziomie 42,492 przy ścieżce logitowej (por. wykres 5).



Wykres 5. Ścieżki wzrostu wydajności pracy przy standardowej (y_1), logitowej (y_2) oraz post-maltuzjańskiej (y_3) trajektorii liczby pracujących i $s=40\%$

Źródło: opracowanie własne.

5. PODSUMOWANIE

Podjęte w pracy analizy można podsumować następująco:

I. W niniejszym opracowaniu modyfikuje się założenie oryginalnego modelu wzrostu Solowa dotyczące stopy wzrostu liczby pracujących. W pierwszym wariantcie przyjmuje się, że liczba pracujących zmienia się po trajektorii określonej przez funkcję logitową. Natomiast w drugim wariantcie zakłada się, że stopa wzrostu liczby pracujących jest pewną malejącą funkcją wydajności pracy.

II. Przy logitowej ścieżce wzrostu liczby pracujących trajektorie technicznego uzbrojenia pracy i wydajności pracy określone są przez pewne funkcje złożone z funkcją hipergeometryczną Gaussa. Natomiast przy post-maltuzjańskiej

ścieżce wzrostu liczby pracujących rozwiązanie równania Solowa zależne jest od przyjętej wartości parametru α (elastyczności produkcji względem nakładów kapitału) – może ono nie posiadać żadnego punktu stacjonarnego, posiadać jeden lub dwa nietrywialne punkty stacjonarne.

III. W przeprowadzonych w opracowaniu symulacjach numerycznych elastyczność produkcji względem nakładów kapitału skalibrowano na poziomie równym 0,68216, zaś stopy inwestycji zmieniano co 10 punktów procentowych od 10% do 40%.

IV. Porównując dwa modele ze zmodyfikowanym założeniem dotyczącym stóp wzrostu liczby pracujących z oryginalnym modelem Solowa, warto podkreślić różnice w relacjach stóp wzrostu liczby pracujących pomiędzy tymi modelami w symulowanym okresie. Logitowa stopa wzrostu liczby pracujących przez początkowe 27 lat jest wyższa niż stopa wzrostu z oryginalnego modelu Solowa, następnie w kolejnych latach obserwujemy odwrócenie relacji. Z kolei post-maltuzjańska stopa wzrostu liczby pracujących jest niższa niż standardowa stopa wzrostu przez cały symulowany okres.

V. Przy porównaniu logitowej i post-maltuzjańskiej stopy wzrostu liczby pracujących okazuje się, że w początkowej fazie (okres ten zależy od przyjętej stopy inwestycji) logitowa stopa jest wyższa od post-maltuzjańskiej, następnie obserwujemy odwrócenie relacji.

VI. We wszystkich symulowanych wariantach stóp inwestycji, przy standardowej, logitowej oraz post-maltuzjańskiej trajektorii liczby pracujących, wydajność pracy rośnie do pewnej asymptoty. Dynamika wydajności pracy przy standardowej oraz logitowej trajektorii liczby pracujących przez początkowe 50 lat jest bardzo zbliżona. Następnie obserwujemy znaczne spowolnienie tempa wzrostu wydajności pracy w modelu ze standardową trajektorią liczby pracujących i ostatecznie wydajność pracy w tym modelu stabilizuje się na zdecydowanie niższym poziomie niż w przypadku dwóch pozostałych modeli. Z kolei wydajność pracy przy założeniu post-maltuzjańskiej ścieżki wzrostu liczby pracujących w okresie początkowym jest znacznie wyższa niż w przypadku dwóch pozostałych ścieżek. Następnie po około 125–320 latach (w zależności od przyjętych stóp inwestycji) wydajność pracy przy założeniu logitowej ścieżki wzrostu dogania wydajność pracy przy ścieżce post-maltuzjańskiej. Ostatecznie asymptoty funkcji wydajności pracy dla trajektorii logitowej i post-maltuzjańskiej położone są na zbliżonym (nieznacznie wyższym dla trajektorii logitowej) poziomie.

VII. Niezależnie od rozważanej trajektorii liczby pracujących różnice w przyjętych założeniach o stopach inwestycji prowadzą do bardzo istotnych różnic w poziomie wydajności pracy. Konkluzja ta jest zgodna z odpowiednim wnioskiem płynącym z oryginalnego modelu Solowa. Przyjęcie stopy inwestycji kolejno na poziomie 10%, 20%, 30% i 40% pozwoli oczekiwać zwiększenia

wydajności pracy z 1 w momencie $t=0$ do kolejno 1,562–1,762, 6,463–8,018, 15,093–18,832 oraz 27,686–34,514 w stuletnim horyzoncie czasowym przy standardowej, logitowej oraz post-maltuzjańskiej trajektorii liczby pracujących.

BIBLIOGRAFIA

- Barro R.J., Sala-i-Martin X. (2004), *Economic Growth*, MA: MIT Press, Cambridge.
- Boucekkine R., Ruiz-Tamarit J.R. (2004), *Special Functions for the Study of Economic Dynamics: The Case of the Lucas–Uzawa Model*, „CORE Discussion Paper”, nr 84, <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.688904>.
- Boucekkine R., Ruiz-Tamarit J.R. (2008), *Special Functions for the Study of Economic Dynamics: The Case of the Lucas–Uzawa Model*, „Journal of Mathematical Economics”, vol. 44, p. 33–54.
- Cattani E. (2006), *Three lectures on hypergeometric functions*, Department of Mathematics and Statistics, University of Massachusetts, Massachusetts, http://people.math.umass.edu/~cattani/hypergeom_lectures.pdf.
- Filipowicz K., Syrek R., Tokarski T. (2016), *Ścieżki wzrostu w modelu Solowa przy alternatywnych trajektoriach liczby pracujących*, referat na VI Ogólnopolską Konferencję „Matematyka i informatyka na usługach ekonomii” im. prof. Zbigniewa Czerwińskiego, Wydział Informatyki i Gospodarki Elektronicznej Uniwersytetu Ekonomicznego w Poznaniu, Poznań, 15–16 kwietnia 2016 roku.
- Filipowicz K., Tokarski T. (2015) *Dwubiegunowy model wzrostu gospodarczego z przepływami inwestycyjnymi*, „Studia Prawno-Ekonomiczne”, tom XCVI, s. 197–221.
- Filipowicz K., Wisła R., Tokarski T. (2015), *Produktywność kapitału a inwestycje zagraniczne w dwubiegunowym modelu wzrostu gospodarczego – analiza konwergencji*, „Przegląd Statystyczny” R. LXII, Zeszyt 1, s. 5–28.
- Galor O. (2005), *From Stagnation To Growth: Unified Growth Theory*, [w:] P. Aghion, S.N. Durlauf (red.), *Handbook of Economic Growth*, Elsevier, Amsterdam, p. 171–193.
- Guerrini L. (2006), *The Solow–Swan model with the bounded population growth rate*, „Journal of Mathematical Economics”, vol. 42, p. 14–21.
- Isaac E., Lui F. (1997), *The problem of population and growth: A review of the literature from Malthus to contemporary models of endogenous population and endogenous growth*, „Journal of Economic Dynamics and Control”, vol. 21, s. 205–242.
- Korn G.A., Korn T.M. (1983), *Matematyka dla pracowników naukowych i inżynierów*, część 1, PWN, Warszawa.
- Krawiec A., Szydłowski M. (2002), *Własności dynamiki modeli nowej teorii wzrostu*, „Przegląd Statystyczny” R. XLVIII, Zeszyt 1, s. 17–24.
- Lucas R. (1988) *On the mechanics of economic development*, „Journal of Monetary Economics”, vol. 22, s. 3–42.
- Malaga K. (2013) *Jednolita teoria wzrostu gospodarczego – stan obecny i nowe wyzwania*, wystąpienie na IX Kongresie Ekonomistów Polskich.
- Mankiw N.G., Romer D., Weil D.N. (1992), *A Contribution to the Empirics of Economic Growth*, „Quarterly Journal of Economics”, May, t. 107(2), p. 407–437.
- Prettner K. (2009), *Population ageing and endogenous economic growth*, „Working Paper. Vienna Institute of Demography”, t. 26(2), p. 811–834.
- Prettner K., Prskawetz A. (2010), *Demographic change in models of endogenous economic growth. A survey*, „Central European Journal of Operations Research”, vol. 18(4), s. 593–608.
- Romer P. (1990), *Endogenous technological change*, „Journal of Political Economy”, vol. 98(5), s. 71–102.

- Solow R.M. (1956), *A Contribution to the Theory of Economic Growth*, „Quarterly Journal of Economics”, February, t. 70(1), p. 65–94.
- Solow R.M. (1957), *Technical Change and the Aggregate Production Function*, „Review of Economics and Statistics”, no. 39, p. 312–320.
- Tokarski T. (2008), *Efekty skali a wzrost gospodarczy*, Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego, Kraków.
- Tokarski T. (2011), *Ekonomia matematyczna. Modele makroekonomiczne*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa.
- Zawadzki H. (2015), *Analiza dynamiki modeli wzrostu gospodarczego za pomocą środowiska obliczeniowego Mathematica*, „Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Krakowie”, nr 4/940, s. 59–69.

Katarzyna Filipowicz, Maciej Grodzicki, Tomasz Tokarski

EQUILIBRIUM OF SOLOW GROWTH MODEL WITH ALTERNATIVE TRAJECTORIES OF THE NUMBER OF WORKERS

Abstract. The aim of the study is to examine the long-run equilibrium of Solow growth model with a modified assumption for a rate of employment growth. In the first case, it is assumed that the number of workers changes in the trajectory defined by the logistic function. In the second case, it is assumed that the rate of growth of employment is a decreasing function of labor productivity (so called post-Malthusian growth path).

The capital labor ratio and labor productivity with logistic growth path of the number of workers are defined by certain functions composed of hypergeometric function of Gauss. When we consider post-Malthusian growth path of employment, solution of the Solow equation depends on the value of the parameter α (production elasticity with respect to capital) – it may have no, one or two non-trivial steady-states.

In performed numerical simulations, we calibrated elasticity of production with respect to capital at a level equal to 0.68216. In all variants of simulated investment rates, the standard, logistic and post-Malthusian trajectory of employment, labor productivity grows to a certain asymptote. Asymptotes of labor productivity for the logistic and post-Malthusian trajectory are located at a similar (slightly higher for logistic trajectory) level. Both are located far higher than the asymptote of labor productivity function in the original Solow growth model.

Keywords: growth rate of the number of workers, equilibrium of Solow model.

JEL: O40