



Kamila Trzcńska 

Uniwersytet Łódzki, Wydział Ekonomiczno-Socjologiczny, Katedra Metod Statystycznych  
Łódź, Polska, [kamila.trzcinska@uni.lodz.pl](mailto:kamila.trzcinska@uni.lodz.pl)

## Kształtowanie się rozkładu dochodów ludności Polski dla regionów na podstawie wybranych modeli teoretycznych<sup>1</sup>

**Streszczenie:** Badania rozkładów dochodów skupiają się głównie na próbach dopasowania rozkładów teoretycznych do empirycznego rozkładu dochodów w różnych przekrojach oraz na analizie tych rozkładów. Wyniki analiz wykazują, że modele trzyparametrowe bardzo dobrze aproksymują rozkłady dochodów wielu państw. Jednym z najczęściej używanych rozkładów trzyparametrowych jest rozkład Daguma. W 2010 roku Zenga skonstruował trzyparametrowy model rozkładu dochodów, który ma wiele interesujących własności statystycznych. Celem artykułu jest zastosowanie modeli Daguma i Zengi do analizy rozkładu dochodów ludności Polski dla regionów. Do estymacji parametrów funkcji gęstości zastosowano inwariantną metodę D'Addario oraz metodę największej wiarygodności. Obliczenia zostały przeprowadzone na podstawie danych indywidualnych gospodarstw domowych dla regionów, zaprezentowanych przez Główny Urząd Statystyczny w 2016 roku. W artykule zastosowano miary nierówności dochodowych obliczone na podstawie rozważanych modeli. Wyniki analizy potwierdzają zasadność stosowania modelu Zengi do analizy badania nierówności dochodowych gospodarstw domowych ludności Polski.

**Słowa kluczowe:** dochody gospodarstw domowych, rozkład Daguma, rozkład Zengi, miary nierówności

**JEL:** C1, C10, C15

<sup>1</sup> Koszty publikacji artykułu pokryte zostały ze środków finansowych konferencji Multivariate Statistical Analysis (MSA 2019), na której został on wygłoszony. Organizacja konferencji MSA 2019 była finansowana w ramach umowy 712/P-DUN/202019 ze środków Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyższego przeznaczonych na działalność upowszechniającą naukę.

# 1. Wprowadzenie

Zagadnienia rozkładów dochodów i bogactwa oraz związane z nimi pojęcie nierównomierności ekonomicznej są obiektem badań statystyków i ekonomistów. Od wielu lat głównym elementem tych badań jest próba dopasowania rozkładów teoretycznych do empirycznego rozkładu dochodów. Modele teoretyczne stanowią narzędzie do badania własności rozkładów empirycznych i umożliwiają wyrażenie charakterystyk liczbowych oraz miar dobrobytu społecznego za pomocą parametrów tych modeli. Badania wskazują, że empiryczne rozkłady dochodów najczęściej cechują się jednomodalnością, prawostronną asymetrią i dodatnią kurtozą (Kot, 1999). Pierwszą sformalizowaną teorię dotyczącą rozkładu i nierównomierności dochodów przedstawił Pareto w przełomowej pracy z 1897 roku.

Istnieje wiele rozkładów teoretycznych, które powstały na bazie obserwacji empirycznych, jako wynik pewnego procesu stochastycznego czy też *ad hoc* (ze względu na kształt). Przegląd większości z nich znajduje się w pracy Kleibera i Kotza (2003). Do aproksymacji rozkładów dochodów ludności Polski stosowano różne modele teoretyczne, m.in. rozkłady logarytmiczno-normalny, Pareto, gamma i wiele innych (Vielrose, 1960; Lange, 1967; Kordos, 1968; 1973; Kot, 2000).

Badania nad rozkładami dochodów i płac w Polsce wykazały, że szczególnie dobrze dopasowują się do ich opisu rozkłady teoretyczne trójparametrowe – w szczególności rozkłady Singha-Maddali oraz Daguma (Jędrzejczak, 1993: 103–112; 2006: 183–198; Łukasiewicz, Orłowski, 2004: 146–151; Brzeziński, 2013: 207–230; Ostasiewicz, 2013: 499–521; Ulman, 2015: 23–34; Ćwiek, Ulman, 2019: 7–25).

Rozkład Daguma należy do krzywych Burra III typu Kleiber, Kotz (2003) i jest najczęściej stosowany (nie tylko w Polsce). Badania wykazały, że jest on nieco lepiej dopasowany od rozkładu Singha-Maddali, należącego do krzywych Burra XII typu. Ponadto rozkład Daguma charakteryzuje się wieloma interesującymi własnościami. Powstał on na podstawie obserwacji rozkładów empirycznych, jest zbieżny do rozkładu Pareto dla wysokich dochodów, a momenty wyższych rzędów dążą do nieskończoności, co zapewnia wysoką zgodność z danymi empirycznymi. Dlatego też rozkład Daguma przewyższa często stosowane rozkłady teoretyczne.

W 2010 roku Zenga zaproponował trójparametrowy rozkład oparty na uciętym rozkładzie Pareto, przedstawionym w pracy Polisicchio (2008). Bardzo dobrze aproksymuje on rozkłady dochodów wielu krajów. Rozkład ten nie był dotąd rozważany w analizie rozkładów ludności Polski. Funkcja gęstości rozkładu Zengi ma wiele interesujących własności i dzięki temu łatwo dopasowuje się do różnego rodzaju dochodów. Oba powyższe trójparametrowe rozkłady dochodów zostaną zastosowane w artykule do opisu empirycznego rozkładu dochodów ludności Polski: Badanie przeprowadzone zostanie dla regionów Polski na podstawie danych indywidualnych i dochodu rozporządzalnego w gospodarstwach domowych w 2016 roku.

## 2. Wybrane modele rozkładu dochodów

### 2.1. Model Daguma

Rozkład Daguma (1977) jest jednym z modeli najczęściej stosowanych do opisu płac i dochodów. Powstał on na podstawie obserwacji empirycznych. Do opisu rozkładu dochodów w Polsce został po raz pierwszy zastosowany przez Jędrzejczak (1993). W artykule rozważany będzie rozkład Daguma typu I, zwany inaczej rozkładem Bura typu III.

Funkcja gęstości tego rozkładu ma postać:

$$f(x : a; b; p) = \frac{apx^{ap-1}}{b^{ap} \left[ 1 + \left( \frac{x}{b} \right)^a \right]^{p+1}}, \quad x > 0, \quad (1)$$

gdzie  $a, b, p > 0$ .

Natomiast dystrybuanta rozkładu Daguma jest następująca:

$$F(x : a; b; p) = \left[ 1 + \left( \frac{x}{b} \right)^a \right]^{-p}, \quad x > 0, \quad (2)$$

gdzie  $a, b, p > 0$ . Parametr  $b$  jest parametrem skali, natomiast  $a$  oraz  $p$  są parametrami kształtu. Na podstawie rozkładu Daguma można wyznaczyć miary nierówności dochodów, takie jak współczynnik Giniego, współczynnik Zengi oraz współczynnik Bonferroniego.

Współczynnik Giniego dla rozkładu Daguma ma postać:

$$G = \frac{\Gamma(p)\Gamma\left(2p + \frac{1}{a}\right)}{\Gamma(2p)\Gamma\left(p + \frac{1}{a}\right)} - 1. \quad (3)$$

Współczynnik Zengi (2007) można wyznaczyć, obliczając pole powierzchni pod wykresem krzywej Zengi danej następującym wzorem:

$$I(q) = \frac{\left( q - B\left(q^{\frac{1}{p}}; p + \frac{1}{a}; 1 - \frac{1}{a}\right) \right)}{q \left[ 1 - B\left(q^{\frac{1}{p}}; p + \frac{1}{a}; 1 - \frac{1}{a}\right) \right]}, \quad q \in (0,1). \quad (4)$$

Natomiast współczynnik Bonferroniego ma postać:

$$B = p \left[ \psi\left(p + \frac{1}{a}\right) - \psi(p) \right]. \quad (5)$$

## 2.2. Model Zengi

W 2010 roku Zenga skonstruował trzyparametrową funkcję gęstości (Zenga, 2010: 3–25; Zenga i in., 2011: 5–33; Zenga, Pasquazzi, Zenga, 2012: 131–149) dla nieujemnych wartości dochodów, która powstała na podstawie rozkładu Pareto, przedstawionego przez Polisicchio (2008):

$$v(x; \mu; k) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\mu}}{2} k^{0.5} (1-k)^{-1} x^{-1.5}, & \mu k \leq x \leq \frac{\mu}{k}; \quad \mu > 0, \quad 0 < k < 1 \\ 0, & \text{dla pozostałych przypadków} \end{cases}. \quad (6)$$

oraz rozkład beta:

$$g(k; \alpha; \theta) = \begin{cases} \frac{k^{\alpha-1} (1-k)^{\theta-1}}{\beta(\alpha; \theta)}, & 0 < k < 1; \quad \theta > 0, \quad \alpha > 0 \\ 0, & \text{dla pozostałych przypadków} \end{cases} \quad (7)$$

gdzie  $B(\alpha; \theta)$  jest funkcją beta.

Funkcja gęstości rozkładu Zengi ma postać:

$$\begin{aligned}
 f(x; \mu; \alpha; \theta) &= \int_0^1 v(x; \mu; k) g(k; \alpha; \theta) dk = \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{2\mu B(\alpha; \theta)} \left(\frac{x}{\mu}\right)^{-1,5} \int_0^{\frac{x}{\mu}} k^{\alpha-0,5} (1-k)^{\theta-2} dk, & \text{for } 0 < x < \mu \\ \frac{1}{2\mu B(\alpha; \theta)} \left(\frac{\mu}{x}\right)^{1,5} \int_0^{\frac{\mu}{x}} k^{\alpha-0,5} (1-k)^{\theta-2} dk, & \text{for } x > \mu \end{cases} \quad (8)
 \end{aligned}$$

Natomiast dla parametru  $\theta > 0$  dystrybuanta jest następująca:

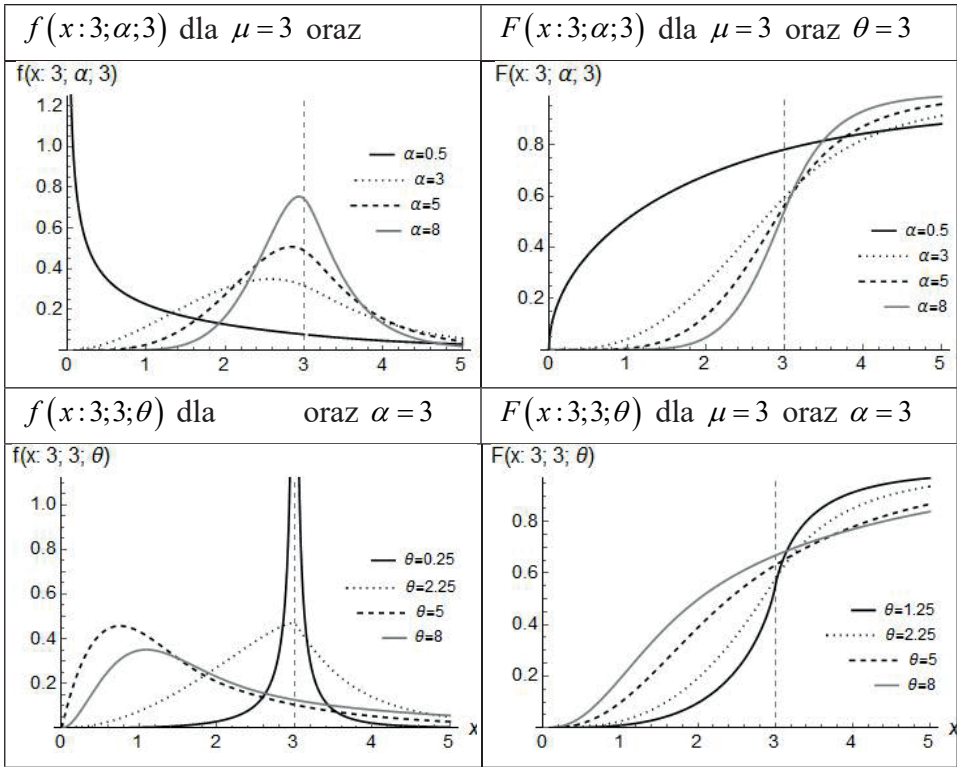
$$\begin{aligned}
 F(x; \mu; \alpha; \theta) &= \\
 &= \begin{cases} \frac{1}{B(\alpha, \theta)} \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ IB\left(\frac{x}{\mu}; \alpha + i - 1; \theta\right) - \left(\frac{\mu}{x}\right)^{0,5} IB\left(\frac{x}{\mu}; \alpha + i - 0,5; \theta\right) \right\} & \text{jeśli } 0 < x \leq \mu \\ 1 - \frac{1}{B(\alpha, \theta)} \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{\mu}{x}\right)^{0,5} IB\left(\frac{\mu}{x}; \alpha + i - 0,5; \theta\right) - IB\left(\frac{\mu}{x}; \alpha + i; \theta\right) \right\} & \text{jeśli } \mu < x. \end{cases} \quad (9)
 \end{aligned}$$

gdzie:

$$IB(x; \alpha; \theta) = \int_0^x t^{\alpha-1} (1-t)^{\theta-1} dt, \quad 0 < x < 1 \quad (10)$$

jest niekompletną funkcją beta.

Parametr  $\mu$  jest parametrem skali, natomiast  $\alpha$  i  $\theta$  są parametrami kształtu. Ponadto parametr  $\mu$  jest interpretowany jako średni dochód indywidualny lub średni dochód gospodarstwa domowego, a parametry  $\alpha$  i  $\theta$  mogą być interpretowane w kategoriach nierówności dochodowych. Wartość parametru  $\alpha$  jest odwrotnym wskaźnikiem nierówności, który kontroluje grubość ogona rozkładu, natomiast  $\theta$  jest bezpośrednim wskaźnikiem nierówności, który kontroluje rozkład wokół wartości oczekiwanej  $\mu$  (Arcagni, Porro, 2013: 285–303; Jędrzejczak, Trzcńska, 2018: 123–140; Porro, 2015: 3967–3977). Funkcja gęstości oraz dystrybuanta rozkładu Zengi przyjmują różne kształty – bardziej różnorodne niż tradycyjne trójparametrowe modele rozkładów dochodów.



Rysunek 1. Funkcja gęstości oraz dystrybuanta rozkładu Zengi

Źródło: opracowanie własne

Współczynnik Giniego oraz Zengi (2007) otrzymamy odpowiednio na podstawie krzywej Lorenza oraz krzywej Zengi (Zenga, 2007b: 5169–5172). Wykres krzywej Lorenza otrzymamy, generując punkty, w których pierwsza współrzędna jest równa dystrybuancie  $F(x; 1; \alpha; \theta)$ , natomiast druga współrzędna jest równa pierwszemu niekompletnemu momentowi zwyczajnemu, który dany jest wzorem:

$$\begin{aligned}
 & H(x:1;a;\theta) = \\
 & = \begin{cases} H_1(x:1;\alpha;\theta) = \\ \frac{1}{B(\alpha;\theta)} \sum_{i=1}^{\infty} [x^{0,5} IB(x:\alpha+i-0,5;\theta) - IB(x:\alpha+i;\theta)], \\ \text{jeśli } 0 < x \leq 1 \\ \\ H_2(x:1;\alpha;\theta) = \\ 1 - \frac{1}{B(\alpha;\theta)} \sum_{i=1}^{\infty} \left[ IB\left(\frac{1}{x}:\alpha+i-1;\theta\right) + x^{0,5} IB\left(\frac{1}{x}:\alpha+i-0,5;\theta\right) \right], \\ \text{jeśli } 1 < x. \end{cases} \quad (11)
 \end{aligned}$$

Wykres krzywej Zengi otrzymamy, generując nkty, w których pierwsza współrzędna jest równa  $F(x:1;\alpha;\theta)$ , natomiast druga współrzędna przyjmuje postać:

$$A(x) = \frac{F(x:1;\alpha;\theta) - H(x:1;\alpha;\theta)}{F(x:1;\alpha;\theta)[1 - H(x:1;\alpha;\theta)]}. \quad (12)$$

Współczynniki nierównomierności Giniego oraz Zengi otrzymujemy w wyniku numerycznego całkowania.

### 3. Wyniki badań empirycznych

Do analizy dochodów gospodarstw domowych ludności regionów Polski w 2016 roku zostały zastosowane rozkłady Daguma i Zengi. Do estymacji parametrów funkcji Zengi  $f(x; \mu; \alpha; \theta)$  zastosowana została inwariantna metoda D'Adario z wykorzystaniem indeksu Pietry, natomiast w przypadku rozkładu Daguma metoda największej wiarygodności. W celu określenia stopnia zgodności rozkładów empirycznych z teoretycznymi wykorzystany został współczynnik podobieństwa struktur oraz indeks Mortara  $A_1$  dany wzorem:

$$A_1 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^s |n_j - \hat{n}_j|, \quad (13)$$

gdzie  $n_j$  oraz  $\hat{n}_j$  oznaczają częstości rzeczywiste oraz szacowane dla poszczególnych przedziałów. Indeks Mortara  $A_1$  oraz współczynnik podobieństwa struktur  $w_p$  przyjmują wartości z przedziału od 0 do 1. Im mniejsze wartości indeksu

Mortara, tym lepsze dopasowanie do danych empirycznych, natomiast w przypadku współczynnika podobieństwa struktur wartości bliskie 1 świadczą o dobrym dopasowaniu do danych empirycznych. Dochodem rozporządzalnym gospodarstwa domowego nazywamy sumę bieżących dochodów gospodarstw domowych z poszczególnych źródeł, pomniejszoną o zaliczki na podatek dochodowy od osób fizycznych, o podatki od dochodów z własności, podatki płacone przez osoby pracujące na własny rachunek, w tym przedstawiciele wolnych zawodów i osoby użytkujące gospodarstwo indywidualne w rolnictwie oraz o składki na ubezpieczenie społeczne i zdrowotne.

W Tabeli 1 zostały zestawione wyniki estymacji oraz miary zgodności dopasowania do danych empirycznych dla rozważanych rozkładów. Natomiast Rysunek 2 obrazuje dopasowanie funkcji gęstości rozkładów Daguma i Zengi. Estymacja została przeprowadzona dla danych indywidualnych gospodarstw domowych w sześciu regionach Polski: centralnym, południowym, wschodnim, północno-zachodnim, południowo-zachodnim oraz północnym.

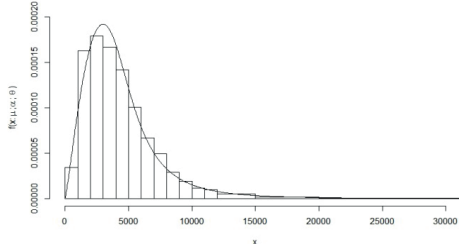
Tabela 1. Zestawienie wyników estymacji rozkładu Daguma oraz rozkładu Zengi dla gospodarstw domowych regionów Polski w 2016 roku

<b>Model Zengi</b>					
<b>Region</b>	<b>Parametry funkcji gęstości</b>			<b>Miary dopasowania</b>	
	$\hat{\mu}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\theta}$	$A_1$	$w_p$
centralny	4482,528	2,2296	3,3522	0,0886	0,9555
południowy	4005,383	3,0344	3,7267	0,1070	0,9463
wschodni	3700,227	2,2785	3,0241	0,1237	0,9380
północno-zachodni	4081,254	2,7429	3,3627	0,1219	0,9389
południowo-zachodni	3985,804	2,3019	2,8481	0,1722	0,9131
północny	4192,679	2,6182	4,1983	0,0873	0,9564
<b>Model Daguma</b>					
	$p$	$a$	$b$	$A_1$	$w_p$
centralny	0,712	2,9702	4390,1600	0,0824	0,9586
południowy	0,704	3,5257	4092,6600	0,1031	0,9483
wschodni	0,609	3,4376	4000,0000	0,0937	0,9531
północno-zachodni	0,879	3,1272	3701,3300	0,1333	0,9332
południowo-zachodni	0,669	3,4323	4160,0500	0,1349	0,9324
północny	0,698	3,1136	4000,8500	0,0792	0,9603

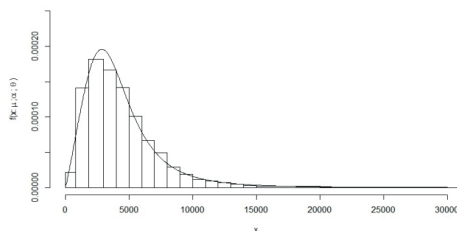
Źródło: opracowanie własne



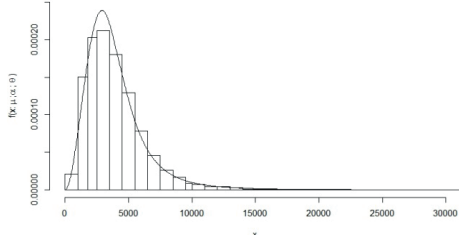
Funkcja gęstości Zengi dla regionu centralnego



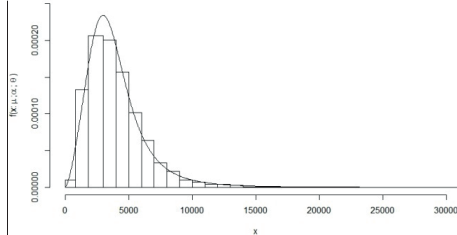
Funkcja gęstości Daguma dla regionu centralnego



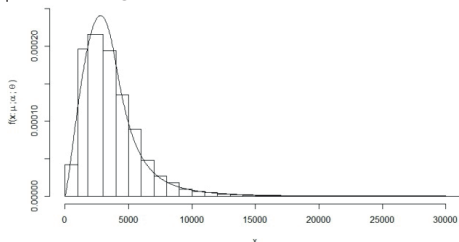
Funkcja gęstości Zengi dla regionu południowego



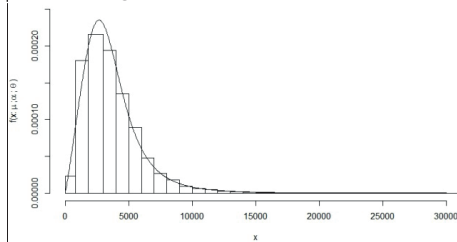
Funkcja gęstości Daguma dla regionu południowego



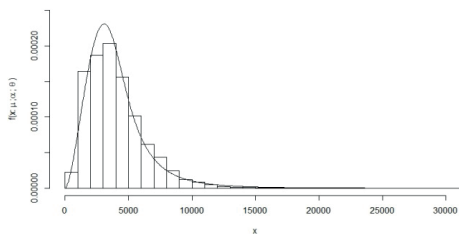
Funkcja gęstości Zengi dla regionu wschodniego



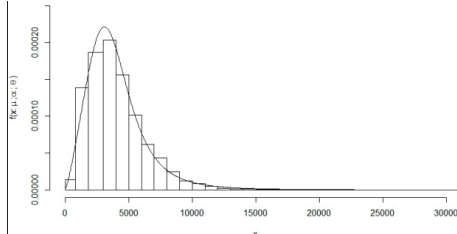
Funkcja gęstości Daguma dla regionu wschodniego

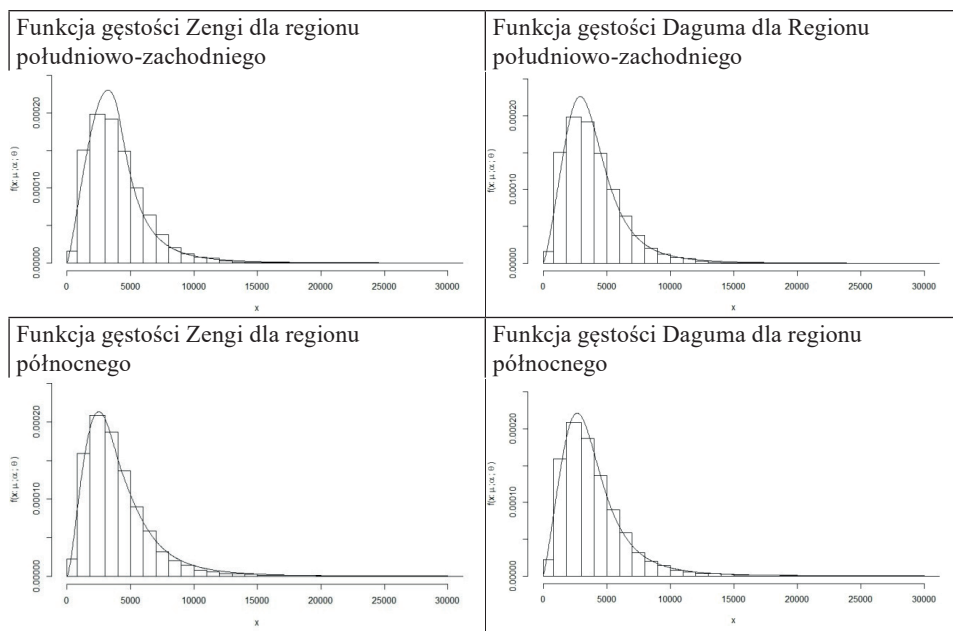


Funkcja gęstości Zengi dla regionu północno-zachodniego



Funkcja gęstości Daguma dla regionu północno-zachodniego





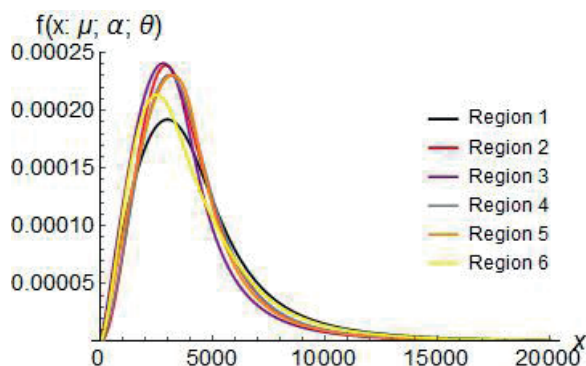
Rysunek 2. Dopasowanie funkcji gęstości Daguma i Zengi do danych empirycznych dla poszczególnych regionów Polski w 2016 roku

Źródło: opracowanie własne

Rezultaty estymacji parametrów rozkładów zaprezentowane w Tabeli 1 oraz na Rysunku 2 potwierdzają dobre dopasowanie rozważanych modeli do rozkładów dochodów gospodarstw domowych regionów Polski. W przypadku obu rozkładów najlepsze dopasowanie do danych empirycznych otrzymujemy dla regionu północnego oraz centralnego, natomiast najgorsze dla regionu południowo-zachodniego.

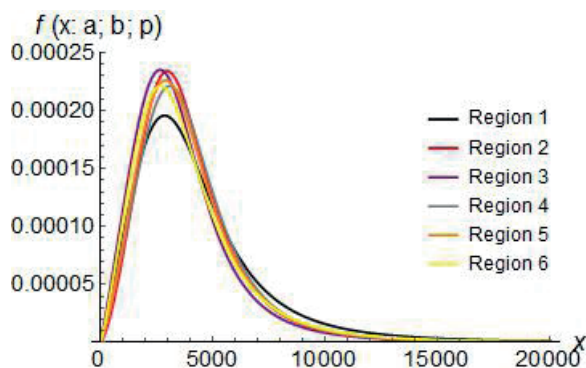
Rysunki 3 i 4 przedstawiają wykresy funkcji gęstości rozkładów Daguma i Zengi dla gospodarstw domowych w roku 2016 w sześciu regionach Polski: region 1 – region centralny, region 2 – region południowy, region 3 – region wschodni, region 4 – region północno-zachodni, region 5 – region południowo-zachodni, region 6 – region północny.

Wykresy funkcji gęstości zarówno dla modelu Daguma, jak i Zengi w przypadku regionów centralnego, północno-zachodniego i północnego znajdują się poniżej wykresów funkcji gęstości dla pozostałych regionów. Regiony centralny, północno-zachodni oraz północny są regionami o najwyższych średnich dochodach. Do zbadania nierówności dochodów gospodarstw domowych zastosowane zostały współczynniki: Giniego, Zengi oraz Bonferroniego. Współczynniki te przyjmują wartości z przedziału  $[0, 1]$ , przy czym wyższe wartości tych współczynników świadczą o większej nierówności w analizowanej zbiorowości.



Rysunek 3. Funkcja gęstości rozkładu Zengi gospodarstw domowych dla regionów Polski w 2016 roku

Źródło: opracowanie własne



Rysunek 4. Funkcja gęstości rozkładu Daguma gospodarstw domowych dla regionów Polski w 2016 roku

Źródło: opracowanie własne

Tabela 2. Empiryczne i teoretyczne wartości miar nierówności dla gospodarstw domowych regionów Polski w 2016 roku na podstawie modelu Zengi

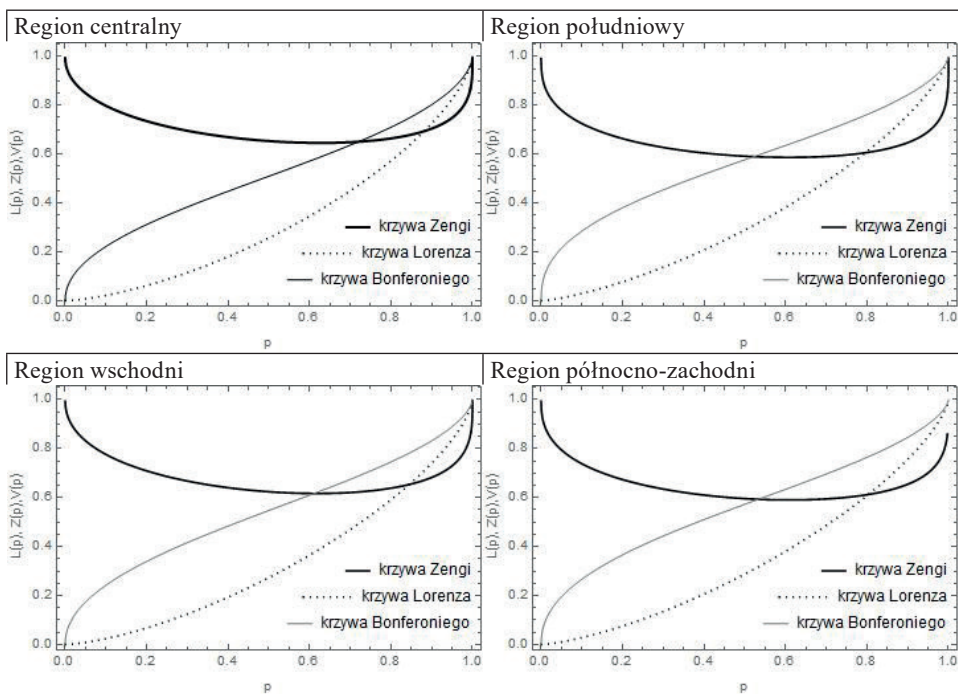
Region	Empiryczny współczynnik Giniego	Teoretyczny współczynnik Giniego	Empiryczny współczynnik Zengi z 2007 r.	Teoretyczny współczynnik Zengi z 2007 r.
centralny	0,35860	0,36203	0,70246	0,70791
południowy	0,30463	0,30967	0,63845	0,64513
wschodni	0,33189	0,33793	0,67271	0,68215
północno-zachodni	0,30998	0,31401	0,64685	0,65198
południowo-zachodni	0,31590	0,32475	0,65262	0,66735
północny	0,37121	0,37102	0,71048	0,71850

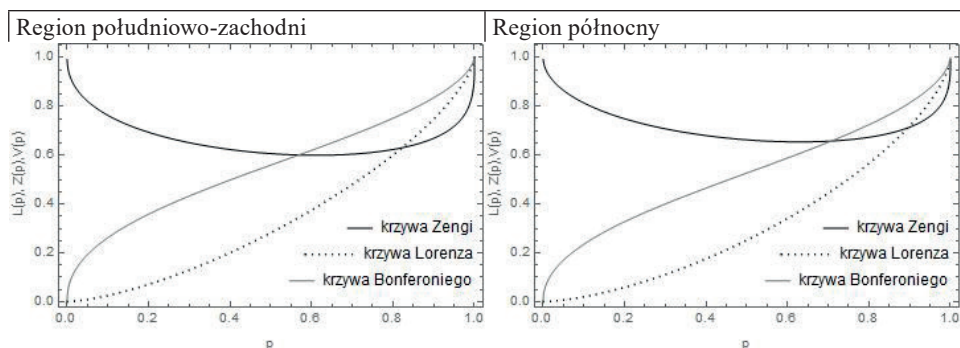
Źródło: opracowanie własne

Tabela 3. Empiryczne i teoretyczne wartości miar nierównomierności dla gospodarstw domowych regionów Polski w 2016 roku na podstawie modelu Daguma

Region	Empiryczny współczynnik Giniego	Teoretyczny współczynnik Giniego	Empiryczny współczynnik Zengi z 2007 r.	Teoretyczny współczynnik Zengi z 2007 r.	Teoretyczny współczynnik Bonferoniego
centralny	0,35860	0,36578	0,70246	0,71048	0,48889
południowy	0,30463	0,31169	0,63845	0,64928	0,43019
wschodni	0,33189	0,33364	0,67271	0,67841	0,45850
północno-zachodni	0,30998	0,35049	0,64685	0,66618	0,43634
południowo-zachodni	0,31590	0,32860	0,65262	0,66595	0,44600
północny	0,37121	0,35167	0,71048	0,69584	0,47437

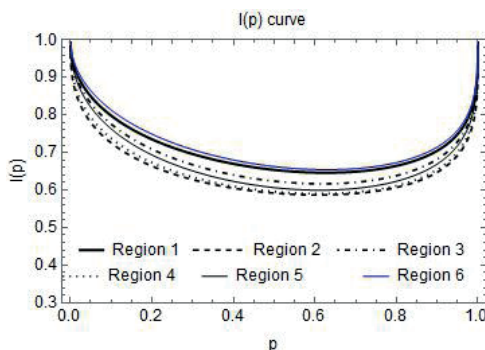
Źródło: opracowanie własne





Rysunek 5. Krzywe nierówności dochodów dla regionów Polski na podstawie modeli teoretycznych

Źródło: opracowanie własne



Rysunek 6. Krzywe Zengi dla regionów Polski na podstawie modelu Zengi

Źródło: opracowanie własne

Rysunek 5 przedstawia krzywe Lorenza  $L(p)$ , krzywe Zengi  $I(p)$  oraz krzywe Bonferroniego  $V(p)$ . Wyniki pomiaru nierówności dochodowej zostały przedstawione w Tabelach 2 i 3. Obliczone indeksy Giniego, Zengi i Bonferroniego ujawniają różnice między regionami Polski. Najbardziej nierównomierny pod względem dochodów jest region północny, natomiast najmniej region południowy. Największe różnice pod względem średniego dochodu występują pomiędzy regionem centralnym i regionem wschodnim. Rysunek 6 wskazuje, że najbardziej zbliżone są do siebie regiony centralny i północny. Krzywe Zengi dla tych regionów praktycznie się pokrywają. Porównując empiryczne i teoretyczne wartości współczynnika Giniego oraz współczynnika Zengi, warto zwrócić uwagę na fakt, że w przypadku modelu Zengi otrzymuje się dokładniejsze oszacowanie.

## 4. Wnioski

W artykule została przedstawiona analiza rozkładu płac i dochodów ludności Polski dla regionów w 2016 roku na podstawie rozkładów Daguma i Zengi. Funkcja gęstości rozkładu Zengi przyjmuje bardzo różnorodne kształty i dzięki temu dobrze dopasowuje się do danych empirycznych. Ponadto zauważyliśmy, że – w odróżnieniu od rozkładu Daguma – parametry rozkładu Zengi można interpretować w kategoriach ekonomicznych, określają one bowiem średni poziom dochodu, dyspersję dochodów, a także grubość ogona rozkładu, co ma związek z występowaniem dochodów bardzo wysokich. Równoważność parametru  $\mu$  z wartością oczekiwaną (która jest tu zawsze skończona) umożliwia stosowanie prostych metod estymacji, co jest dodatkową zaletą tego modelu.

Analiza miar nierówności dochodowych przeprowadzona na podstawie rozkładów Daguma i Zengi pokazała różnice między gospodarstwami domowymi w regionach Polski. Na podstawie przeprowadzonej analizy można stwierdzić, że stosując rozkład Zengi, otrzymuje się bardzo dokładne oszacowanie współczynników nierównomierności. Potwierdza to zasadność stosowania modelu Zengi do opisu dochodów ludności Polski dla regionów.

### Bibliografia

- Arcagni A., Porro F. (2013), *On the parameters of Zenga distribution*, „Statistical Methods & Applications”, nr 22(3), s. 285–303.
- Brzeziński M. (2013), *Parametric modelling of income distribution in Central and Eastern Europe*, „Central European Journal of Economic Modelling and Econometrics”, nr 35, s. 207–230.
- Ćwiek M., Ulman P. (2019), *Income and Poverty in Households in Selected European Countries*, „Acta Universitatis Lodzianis. Folia Oeconomica”, t. 6, nr 345, s. 7–25.
- Dagum C. (1977), *A New Model of Personal Income Distribution. Specification and Estimation*, „Economie Applique”, t XXX, nr 3, s. 413–436.
- Jędrzejczak A. (1993), *Application of the Dagum distribution in the analysis of income distributions in Poland*, „Acta Universitatis Lodzianis. Folia Oeconomica”, t. 131, s. 103–112.
- Jędrzejczak A. (2006), *The characteristic of theoretical income distributions and their application to the analysis of wage distributions in Poland by regions*, „Acta Universitatis Lodzianis. Folia Oeconomica”, t. 196, s. 183–198.
- Jędrzejczak A., Trzcińska K. (2018), *Application of the Zenga distribution to the analysis of household income in Poland by socio-economic group*, „Statistica & Applicazioni”, t. 16, nr 2, s. 123–140.
- Kleiber C., Kotz S. (2003), *Statistical Size Distributions in Economics and Actuarial Sciences*, Wiley, Hoboken.
- Kordos J. (1968), *Metody matematyczne badania i analizy rozkładów dochodów ludności*, Główny Urząd Statystyczny, Warszawa.
- Kordos J. (1973), *Metody analizy i prognozowania rozkładów płac i dochodów ludności*, Główny Urząd Statystyczny, Warszawa.
- Kot S. M. (1999), *Analiza ekonometryczna kształtowania się płac w Polsce w okresie transformacji*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa–Kraków.

- Kot S. M. (2000), *Ekonometryczne modele dobrobytu*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa–Kraków.
- Lange O. (1967), *Wstęp do ekonometrii*, Państwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa.
- Łukasiewicz P., Orłowski A. (2004), *Probabilistic Models of Income Distributions*, „PhysicaA”, nr 344, s. 146–151.
- Ostasiewicz K. (2013), *Adekwatność wybranych rozkładów teoretycznych dochodów w zależności od metody aproksymacji*, „Przegląd Statystyczny”, t. 60, cz. 4, s. 499–521.
- Polisicchio M. (2008), *The continuous random variable with uniform point inequality measure*, „Statistica & Applicazioni”, t. 6, nr 2, s. 137–151.
- Porro F. (2015), *Zenga Distribution and Inequality Ordering*, „Communications in Statistics, Theory and Methods”, nr 44(18), s. 3967–3977.
- Ulman P. (2015), *Income of household members in Poland*, „Folia Oeconomica Cracoviensia”, t. LVI, s. 23–34.
- Vielrose E. (1960), *Rozkład dochodów według wielkości*, Polskie Wydawnictwo Gospodarcze, Warszawa.
- Zenga M.M. (2007), *Inequality curve and inequality index based on the ratios between lower and upper arithmetic means*, „Statistica & Applicazioni”, t. 5, nr 1, s. 3–28.
- Zenga M.M. (2010), *Mixture of Polisicchio's Truncated Pareto Distributions with Beta Weights*, „Statistica & Applicazioni”, t. 8, nr 1, s. 3–25.
- Zenga M.M., Pasquazzi L., Zenga M. (2012), *First Applications of a New Three Parameter Distribution for Non-Negative Variables*, „Statistica & Applicazioni”, t. 10, nr. 2, s. 131–149.
- Zenga M.M., Pasquazzi L., Polisicchio M., Zenga M. (2011), *More on M.M. Zenga's New Three-Parameter Distribution for Non-Negative Variables*, „Statistica & Applicazioni”, t. 9, nr 1, s. 5–33.

### Analysis of Household Income in Poland by Regions Based on Selected Income Distribution

**Abstract:** Research on income distributions focuses mainly on attempts to match theoretical distributions to the empirical income distribution and on the analysis of these distributions. The analysis results show that three-parameter models very well approximate the income distribution of many countries. The Daguma distribution is recognised in the literature on income research as one of the best three parameter income distribution models. In 2010 Zenga proposed a new three-parameter model for economic size distribution which possesses interesting statistical properties. The aim of this paper is to use the Dagum and Zenga model to analyze the distribution of Polish household income by regions. The D'Addario invariant methods and the maximum likelihood method were used to estimate the density function parameters. The calculations presented in the paper has been based on the individual data coming from the random sample obtained within the Household Budget Survey by regions by the Central Statistical Office in 2016. The article presents income inequality measures based on the considered models. The results of the calculations confirm that Zenga distribution is a good income distribution model which can be applied to analyze the income households of the Polish population.

**Keywords:** household income, Dagum distribution, Zenga distribution, income inequality measures

**JEL:** C1, C10, C15

 <p><b>OPEN ACCESS</b></p>	<p>© by the author, licensee Lodz University – Lodz University Press, Łódź, Poland. This article is an open access article distributed under the terms and conditions of the Creative Commons Attribution license CC-BY (<a href="https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/">https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/</a>)</p>
 <p><b>COPE</b> Member since 2018 JM13703</p>	<p>Received: 2020-05-18; verified: 2020-08-28. Accepted: 2021-03-31</p> <p>This journal adheres to the COPE's Core Practices <a href="https://publicationethics.org/core-practices">https://publicationethics.org/core-practices</a></p>