Folia Oeconomica
Acta Universitatis Lodziensis
ISSN 0208-6018 e-ISSN 2353-7663
www.czasopisma.uni.lodz.pl/foe/
4(336) 2018
DOI: http://dx.doi.org/10.18778/0208-6018.336.04

Tadeusz Bednarski
Uniwersytet Wrocławski, Wydział Prawa, Administracji i Ekonomii, Instytut Nauk Ekonomicznych, tadeusz.bednarski@uwr.edu.pl

Hugo Dionizy Steinhaus – droga do współczesnej teorii prawdopodobieństwa

Streszczenie: Hugo Steinhaus (1887–1972) ukończył studia matematyczne i filozoficzne na Uniwersytecie Lwowskim. W latach 1905–1911 przebywał w Getyndze, pracując nad doktoratem pod opieką Davida Hilberta. W 1920 roku został profesorem Uniwersytetu Jana Kazimierza we Lwowie. Skupione wokół niego i Stefana Banacha grono wybitnych matematyków tworzyło silny ośrodek matematyczny specjalizujący się w analizie funkcjonalnej. Po II wojnie światowej osiedlił się we Wrocławiu, gdzie współtworzył matematyczne środowisko naukowe, a następnie wrocławską szkołę zastosowań matematyki. Jest autorem i współautorem ponad 250 prac naukowych i publikacji popularyzujących matematykę. W 1923 roku H. Steinhaus opublikował w czasopiśmie „Fundamenta Mathematicae" wyniki zawierające aksjomatyczny opis pewnej miary prawdopodobieństwa określonej na podzbiorach przestrzeni nieskończonych ciągów zero-jedynkowych. Celem niniejszego artykułu jest próba ukazania istotnej roli, jaką wyniki te odegrały w procesie aksjomatyzacji prawdopodobieństwa, zakończonej w 1933 roku publikacją Andrieja Kołmogorowa.

Słowa kluczowe: historia prawdopodobieństwa, Hugo Steinhaus

JEL: B16

1. Wprowadzenie

Ocena wkładu wybitnych jednostek w rozwój jakiejkolwiek dziedziny wiedzy jest w jakimś stopniu subiektywna. Wynika ona bowiem z historycznych analiz całego procesu zmian, w którym w szczególności uwzględnia się rolę czynników zewnętrznych, kształtujących motywy i cele badawcze, oraz bierze pod uwagę rozwój narzędzi i metod badawczych. Wreszcie, co jest najtrudniejsze w ocenie, „szacuje się", na ile dzieło danej jednostki przyspieszyło dalszy bieg zdarzeń ku rozwiązaniu finalnemu. Także uznanie czyjejś pracy za dzieło finalne jest wynikiem nieformalnej i nie zawsze jednomyślnej oceny naukowców. W momencie gdy Andriej Kołmogorow w roku 1933 publikował swoją aksjomatyzację prawdopodobieństwa, w zasadzie wiadomo było, jak tego dokonać, a jego praca została uznana za kluczową w historii prawdopodobieństwa z powodów wykraczających poza sam proces aksjomatyzacji. Maurice Fréchet określił to następująco: „It is not enough to have all the ideas in mind, to recall them now and then; one must make sure that their totality is sufficient, bring them together explicitly, and take responsibility for saying that nothing further is needed in order to construct the theory. This is what Mr. Kolmogorov did. This is his achievement" (Fréchet, 1938: 54).

Z kolei zaangażowanie badawcze H. Steinhausa w proces aksjomatyzacji było, jak się wydaje, drugorzędne, i – co więcej – to inne zainteresowania naukowe doprowadziły go do wyników, których część miała istotne znaczenie dla ugruntowania roli teorii miary w unifikacji prawdopodobieństwa.

Początek pisanej historii o prawdopodobieństwie to dzieło Gerolamo Cardano (1501–1576) *The Book on Games of Chance*, które ukazało się pośmiertnie w roku 1663 i było zbiorem wskazówek dla graczy w gry hazardowe. Przez kolejne niemal 200 lat powstawały opracowania o prawdopodobieństwie, adresowane głównie do „miłośników" hazardu, jako że był to dobry rynek zbytu. Jednak w miarę upływu czasu zaczęto uświadamiać sobie wszechobecną przypadkowość, towarzyszącą jej złożoność zjawisk otaczającego świata oraz potrzebę użycia języka probabilistycznego do jej opisu. Jakubowi Bernoulliemu (1654–1705) zawdzięczamy częstościową interpretację prawdopodobieństwa, a jego słabe prawo wielkich liczb mogło być postrzegane jako formalne potwierdzenie zasadności używania średniej arytmetycznej, na przykład dla poprawienia dokładności pomiarów astronomicznych – metody używanej w szczególności przez Johannesa Keplera i Edmunda Halleya. Abraham de Moivre (1667–1754), choć także dedykował swoją monografię (de Moivre, 1718) graczom, umieścił w jej drugim, poszerzonym wydaniu pierwowzór centralnego twierdzenia granicznego wraz z technicznie złożonym dowodem. Pierre Simon Laplace (1749–1827) wprowadził matematyczne metody analityczne do prawdopodobieństwa, a jego filozoficzny esej o prawdopodobieństwie (Laplace, 1902), który do dziś jest publikowany, sprzedawał się w dużej jak na tamte czasy liczbie egzemplarzy (nakład pierwszego wydania angielskiego wynosił 1000 egzemplarzy). Do prawdopodobieństwa klasycznego, które omawiano w każdej książce o prawdopodobieństwie, dołączyło tak zwane prawdopodobieństwo geometryczne lub ciągłe, gdzie prawdopodobieństwa zdarzeń związanych z losowym wyborem punktów w przestrzeni obliczano jako względne pola (miary) obszarów. Wraz z rozwijającą się teorią całki i złożonością zbiorów mierzalnych (całka i miara Lebesgue'a) pojęcia rodziny zdarzeń elementarnych, zdarzenia i wartości oczekiwanej stawały się coraz mniej spójne. Sytuację komplikowały jeszcze bardziej nieskuteczne próby ujęcia w klasyczny ideał prawdopodobieństwa eksperymentów „myślowych" z nieskończonym rzucaniem monetą.

Zdaniem historyków punktem zwrotnym, kierującym uwagę matematyków na pilną potrzebę uporządkowania wiedzy probabilistycznej, była ogłoszona przez Davida Hilberta w roku 1900 generalna potrzeba aksjomatyzacji tych nauk fizycznych, gdzie matematyka pełniła dominującą rolę: „The investigations on the foundations of geometry suggest the problem: To treat in the same manner, by means of axioms, those physical sciences in which already today mathematics plays an important part; in the first rank are the theory of probabilities and mechanics. As to the axioms of the theory of probabilities, it seems to me desirable that their logical investigation should be accompanied by a rigorous and satisfactory development of the method of mean values in mathematical physics, and in particular in the kinetic theory of gases" (Gilbert, 1902: 438).

2. Problem prawdopodobieństw przeliczalnych Borela i rozwiązanie Steinhausa

Wydaje się, że to właśnie Émil Borel (1871–1956) pierwszy podjął próbę uporządkowania wiedzy probabilistycznej. Przedstawił on trzy kategorie prawdopodobieństw (Borel, 1909):

1) prawdopodobieństwo klasyczne (skończony zbiór zdarzeń elementarnych i jednakowo prawdopodobnych),
2) prawdopodobieństwo ciągłe, nazywane też geometrycznym,
3) prawdopodobieństwa przeliczalne, które dalej dzielił na trzy odrębne przypadki:
   – w próbie jest skończona liczba wyników, ale próby powtarzamy nieskończenie wiele razy,
   – próba ma przeliczalną liczbę wyników, ale jest powtarzana skończenie wiele razy,
   – próba ma przeliczalną liczbę wyników, przeliczalna jest również liczba prób.

Każda z kategorii jest opisana odrębnie. Pierwsza – prawdopodobieństwo klasyczne – jest pojęciowo elementarna. Druga – prawdopodobieństwo geometryczne – jest oparta na opisie probabilistycznym zdarzeń związanych z losowym wyborem punktów w przestrzeni euklidesowej. Podstawową metodą tej kategorii było posługiwanie się długością, powierzchnią lub ogólnie miarą zbiorów. Nie dość, że prowadziła ona do wątpliwości związanych z niemożnością ścisłego ustalenia jednakowo prawdopodobnych zdarzeń elementarnych (paradoks Bertranda), to generowała także inne logiczne trudności: losowy wybór liczby z odcinka [0, 1] wykluczał wybór liczb wymiernych. Borel „uspokajał", że zerowe prawdopodobieństwo wylosowania liczby wymiernej z odcinka [0, 1] nie oznacza, że liczb tych nie ma(!), i że także w przypadku prawdopodobieństw przeliczalnych prawdopodobieństwo równe zeru nie jest tożsame z niemożnością zaobserwowania zdarzenia „niemożliwego": „La probabilité pour qu'un nombre pris au hazard sois rationelle est nulle; cela ne veut pas dire qu'il n'y a pas de nombres rationnels. Il en sera de même dans la théorie des probabilités dénombrables: probabilité nulle ne devra pas être considérée comme l'équivalent d'impossibilité" (Borel, 1905: 125).

Daje to wyobrażenie, jak nowe pojęciowo i niejasne w interpretacji sytuacje tworzył – nawet na początku XX wieku – rachunek prawdopodobieństwa. Dla trzeciej kategorii prawdopodobieństwa, związanej z formalnym opisem własności nieskończonych ciągów prób, Borel bada ciągi eksperymentów zero-jedynkowych określonych przez ciągi prawdopodobieństw sukcesu $\{p_n\}_{n \geq 1}$ i formułuje następujące pytania:

1. Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia, że w nieskończonej liczbie prób sukces nie nastąpi wcale?
2. Jakie jest prawdopodobieństwo, że sukces nastąpi dokładnie k razy?
3. Jakie jest prawdopodobieństwo, że sukces nastąpi nieskończenie wiele razy?

Odpowiada na nie, analizując zbieżność szeregów prawdopodobieństw sukcesu w kolejnych próbach, czyli w opisie posługuje się własnościami eksperymentów powtarzanych skończoną liczbę razy. Podsumowaniem jego rozważań jest następujący fakt:

Przyjmujemy, że prawdopodobieństwa sukcesu p_i należą do odcinka (0, 1); wprowadźmy następujące oznaczenia:

1) prawdopodobieństwo, że sukces nie nastąpi wcale $A_0 = (1 - p_1)(1 - p_2) \ldots$,
2) prawdopodobieństwo zdarzenia, że sukces nastąpi dokładnie k razy $A_k = A_0 \sum u_{n_1} u_{n_2} \ldots u_{n_k}$, gdzie sumowanie przebiega wszelkie podzbiory $\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$ oraz $u_n = p_n/(1 - p_n)$,
3) A_∞ zdarzenie polegające na tym, że sukces nastąpi nieskończenie wiele razy,

wtedy:
1) jeśli szereg prawdopodobieństw sukcesu jest zbieżny, to prawdopodobieństwa A_0, A_1, A_2, … mają określone wartości, a prawdopodobieństwo A_∞ jest równe zeru;
2) jeśli szereg prawdopodobieństw sukcesów jest rozbieżny, to wszystkie prawdopodobieństwa A_i są równe zeru i $A_\infty = 1$.

Borel nie wprowadza pojęcia przestrzeni zdarzeń elementarnych, na której jednoznacznie określona byłaby rodzina dopuszczalnych zdarzeń. Jeśli nawet byłaby ona określona, to nie bardzo byłoby wiadomo, czym je mierzyć. Uzupełnienie tych brakujących elementów i zbudowanie przestrzeni probabilistycznej w przypadku borelowskich prawdopodobieństw przeliczalnych zawdzięczamy właśnie Hugonowi Steinhausowi (1923). Badając własności graniczne szeregów o losowych składnikach, ograniczał on swoje rozważania do aksjomatyzacji eksperymentu polegającego na nieskończonym rzucaniu monetą.

Steinhaus rozważa przestrzeń Ω wszystkich ciągów zero-jedynkowych e_1, e_2, … i $\mathcal{M}$ rodzinę wszystkich podzbiorów Ω. Następnie wyróżnia klasę podzbiorów $\mathcal{R} \subset \mathcal{M}$ i funkcję μ określoną na $\mathcal{R}$ spełniające warunki:

1. $\mu(E) \geq 0$ dla wszystkich E w $\mathcal{R}$.
2.
   i. Zbiory E^n o ustalonych pierwszych n-elementach i pozostałych dowolnych należą do $\mathcal{R}$.
   ii. Jeśli E^n i E'^n różnią się jedynie na i-tym miejscu, to $\mu(E^n) = \mu(E'^n)$.
   iii. $\mu(\Omega) = 1$.
3. Jeśli E_1, E_2, … jest ciągiem wzajemnie rozłącznych zbiorów z $\mathcal{R}$, to $\cup_{i=1}^{n} \mathbf{Ei}$ i $\cup_{i=1}^{\infty} \mathbf{Ei}$ należą do $\mathcal{R}$ oraz

$$\mu(\cup_{i=1}^{n} E_i) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$$

i

$$\mu(\cup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$$

4. Dla podzbiorów E_1, E_2 rodziny $\mathcal{R}$, jeśli $E_1 \supset E_2$, to E_1/E_2 należy do $\mathcal{R}$. Jeśli E należy do $\mathcal{R}$ i $\mu(E) = 0$, to każdy podzbiór zbioru E także należy do $\mathcal{R}$.

Steinhaus wyjaśnia, że warunki 1, 3, 4, 5 są identyczne z aksjomatyzacją zbiorów mierzalnych i miary Lebesgue'a podaną i wykazaną przez Wacława Sierpińskiego (1919). Jedyna różnica leży w punkcie 2, gdzie Sierpiński definiuje miarę odcinków równą ich długości, a Steinhaus przez zbiory cylindryczne buduje miarę, która jest zgodna z ciągiem eksperymentów polegających na rzucaniu symetryczną monetą: „Dans cette interprétation les postulats 1–5 ne sont qu'une répétition presque verbale des postulats dont s'est servi M. Sierpiński pour définir les ensambles measurables (L) et leur mesure. La seule différence est que le postulat 2 de M. Sierpiński attribue à tout intervalle J fini et fermé sa longueur comme mesure $\mu(J)$ tandis que nôtre postulat 2 est divisé en trois propositions 2i, 2ii, 2iii (ce qu'il fallait faire pour mettre à jour le lien entre la théorie des jeux finis et celle des jeux infinis). La definition de $\mathcal{R}$ comme produit est la même" (Steinhaus, 1923: 290).

Dowód istnienia miary μ spełniającej postulaty 1–5 jest dwuetapowy. W pierwszym kroku wykazuje się, że każdy nieskończony ciąg 0–1 jest równoważny dwójkowemu rozwinięciu liczby z odcinka [0, 1] i wtedy zbiory z punktu 2i) odpowiadają odcinkom postaci $[q/2^n, (q + 1)/2^n]$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ i $q < 2^n$. Następnie wykazuje się, że miara Lebesgue'a tych odcinków jest zgodna z prawdopodobieństwami dla niezależnych rzutów monetą. W kolejnym kroku Steinhaus dowodzi, że rodzina zbiorów cylindrycznych za pomocą operacji przeliczalnie addytywnych prowadzi do wszystkich pododcinków odcinka [0, 1]. W efekcie, na mocy twierdzenia Sierpińskiego, uzyskujemy istnienie miary μ, która jest równoważna mierze Lebesgue'a.

Metoda aksjomatycznej definicji miary – zaadaptowana przez Steinhausa dla prawdopodobieństw przeliczalnych – jest i dziś pewnego rodzaju standardem konstrukcji miary: rodzina $\mathcal{R}$ jest σ-ciałem, mamy podrodzinę generującą to σ-ciało i wiemy, jak na niej określić miarę (w ogólnym przypadku przeliczalna addytywność miary na ciele zbiorów gwarantuje jej jednoznaczne rozszerzenie na generowane σ-ciało). Kołmogorow, poza doskonalszą jej redukcją i dalej idącym wyabstrahowaniem, niewiele mógł zmienić. Mankamentem metody był sam proces konstrukcji miary, uzależniony od „wzorca", jakim była miara Lebesgue'a. Aleksandr Khinchin i Andriej Kolmogorov (1925) zastosowali pomysł Steinhausa, polegający na użyciu miary Lebesgue'a, do konstrukcji miary probabilistycznej dla dowolnego eksperymentu odpowiadającego realizacjom niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie, skupionym na skończonej liczbie wartości. Wydawało się, że tam leżał jednak kres możliwości zastosowania miary Lebesgue'a. Mamy przecież ciągi ciągłych zmiennych losowych, i to niekoniecznie niezależnych, mamy złożone przestrzenie funkcyjne, gdzie także w sposób naturalny pojawiała się potrzeba określenia miar probabilistycznych. Kolejny etap polegał więc na „uwolnieniu się" od miary Lebesgue'a. Potrzeba unifikacji teorii prawdopodobieństwa wymagała więc bardziej ogólnego pojęcia miary i nie tylko samej aksjomatyzacji prawdopodobieństwa, ale także wykazania, że jest ona na tyle ogólna, iż obejmie wszystkie omawiane przypadki rzeczywistych i wyabstrahowanych eksperymentów losowych.

3. Dzieło Kołmogorowa

Apel Hilberta (1902) dotyczący aksjomatyzacji prawdopodobieństwa był z pewnością zachętą dla wielu matematyków. Antoni Łomnicki (1923) również pracował nad aksjomatyzacją prawdopodobieństwa. Stefan Mazurkiewicz (1915) sygnalizował formalne niedostatki pojęcia prawdopodobieństwa. Ugo Broggi (1907) w swoim usiłowaniu aksjomatyzacji prawdopodobieństwa przeoczył, że addytywność nie implikuje przeliczalnej addytywności. W roku 1933 Kołmogorow opublikował pracę *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (Kolmogorov, 1933), nazywaną często *Grundbegriffe Kołomogorowa* – kluczowe dzieło współczesnej teorii prawdopodobieństwa. Praca przedstawia aksjomatyzację teorii prawdopodobieństwa, jej praktyczne uzasadnienie i obszerne omówienie jej formalnych implikacji. Oto lista sześciu aksjomatów, z których pierwszych pięć odnosi się do prawdopodobieństwa klasycznego:

Niech Ω będzie zbiorem elementów $e_1, e_2, \ldots$, które będziemy nazywać zdarzeniami elementarnymi, i niech $\mathcal{F}$ oznacza rodzinę podzbiorów Ω; elementy $\mathcal{F}$ będziemy nazywać zdarzeniami losowymi.

1. $\mathcal{F}$ jest ciałem zbiorów.
2. $\mathcal{F}$ zawiera Ω.
3. Każdemu zbiorowi A w $\mathcal{F}$ przypisana jest nieujemna liczba $P(A)$ nazwana prawdopodobieństwem zbioru A.
4. $P(\Omega) = 1$.
5. Jeśli A i B nie mają elementów wspólnych, to $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Parę $\mathcal{F}$ i P Kołmogorow nazywa uogólnionym ciałem prawdopodobieństwa. Nazywa ją ciałem prawdopodobieństwa, jeśli dodatkowo spełniony jest warunek 6, który określa on mianem aksjomatu ciągłości:

6. Dla malejącego ciągu zdarzeń $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \ldots$, dla których $\cap A_i = \varnothing$, $limP(A_i) = 0$.

Aksjomat ciągłości nie jest potrzebny, gdy mamy skończone ciała zdarzeń, a w przypadku ciał nieskończonych gwarantuje przeliczalną addytywność prawdopodobieństwa na $\mathcal{F}$. Jego znaczenia nie daje się wyjaśnić z praktycznego punktu widzenia, ponieważ realne eksperymenty mają z natury rzeczy skończoną liczbę możliwych wyników. Jak pisze Kolmogorov, nieskończone ciała zbiorów pojawiają się jako wyidealizowany obraz rzeczywistych procesów losowych: „Since the new axiom is essential for infinite fields of probability only, it is almost impossible to elucidate its empirical meaning, as has been done, for example, in the case of Axioms I–V in §2 of the chapter. For, in describing any observable random process we can obtain only finite fields of probability. Infinite fields of probability occur only as idealized models of real random processes" (Kolmogorov, 1956: 15).

Przełomowość pracy Kołmogorowa leży nie tylko w przejrzystej i dogodnej aksjomatyzacji miary prawdopodobieństwa na ciele zdarzeń, ale także – a może przede wszystkim – w tym, co z tej aksjomatyzacji autor dedukuje. Otóż objaśnia on praktyczny sens aksjomatów 1–5, odnosząc je do realnych eksperymentów. Zestawia naturalne działania na ciele zbiorów z koniunkcją i alternatywą zdarzeń wysłowionych w języku naturalnym. Wprowadza pojęcie prawdopodobieństwa warunkowego, dedukuje formułę na prawdopodobieństwo całkowite, dowodzi twierdzenia Bayesa, wprowadza pojęcie niezależnych eksperymentów i wyprowadza z niego niezależność zdarzeń. Kołmogorow definiuje zmienną losową, jej wartość oczekiwaną i wiąże pojęcie warunkowej wartości oczekiwanej z pojęciem zmiennej losowej. Wprowadza pojęcie łańcucha Markowa. Sporo, jak na klasyczną definicję prawdopodobieństwa.

Warunek ciągłości 6 pozwala Kołmogorowowi wywnioskować przeliczalną addytywność prawdopodobieństwa na ciele $\mathcal{F}$, a następnie dowieść jednoznaczności rozszerzenia takiego prawdopodobieństwa na σ-ciało zbiorów borelowskich (Kołmogorow nazywa je ciałem zbiorów Borela). Ponieważ dalsze etapy opisu prawdopodobieństwa są związane z tak niezbywalnymi pojęciami, jak wartość oczekiwana, warunkowa wartość oczekiwana czy nieskończenie wymiarowa przestrzeń produktowa, które wymagają σ-ciał borelowskich, można zadać sobie pytanie, dlaczego Kołmogorow nie uwzględnił postulatu przeliczalnej addytywności zdarzeń w swoich aksjomatach, pozostawiając ją niejako na boku swoich tak ważnych rozważań. Być może było to podyktowane potrzebą minimalizacji założeń o strukturze zdarzeń. Gdyby to uczynił, musiałby zapewne uznać „szczególną" aksjomatyzację Steinhausa-Sierpińskiego za jeden z kluczowych kroków w budowie współczesnej teorii prawdopodobieństwa. W swoim spisie bibliograficznym Kołmogorow nie wymienia pracy Sierpińskiego (1919). Wymienia natomiast pracę Steinhausa, choć w kluczowych momentach opisu procesu aksjomatyzacji nie nawiązuje do niej. Cytuje natomiast Maurice'a Frécheta, Felixa Hausdorffa, Ottona Nikodyma i Constantina Caratheodory'ego, uznając zapewne, że matematycy ci przyczynili się do osiągnięcia dostatecznego dla jego potrzeb poziomu abstrakcji przy budowie miary i całki. We współczesnych analizach historii prawdopodobieństwa – interesującej i bogatej monografii Jana von Plato (1994) oraz w opublikowanej w „Statistical Science" analizie źródeł Kołmogorowskiego Grundbegriffe (Shafer, Vovk, 2004) – Steinhaus znajduje zdecydowanie większe uznanie niż w samym dziele Kołmogorowa.

Rozwiązując problem Borela, Steinhaus w pewnym sensie kontynuował swoje wieloletnie zainteresowania związane z badaniami zbieżności szeregów trygonometrycznych i nie wydaje się, żeby celem nadrzędnym jego rozważań była aksjomatyzacja prawdopodobieństwa. Problem sformułowany przez Borela był ważnym pytaniem na drodze do formalnej unifikacji prawdopodobieństwa, a aksjomatyczna propozycja miary probabilistycznej w przypadku prawdopodobieństw przeliczalnych podana przez Steinhausa, służąca dowodowi mocnego prawa wielkich liczb, po prostu zlikwidowała istotną przeszkodę na niej. Mimo że, z natury rzeczy, zaproponowana miara prawdopodobieństwa odnosiła się do eksperymentalnego konkretu, trudno byłoby nie uznać, że jej ujęcie zawierało najistotniejsze elementy późniejszej aksjomatyki Kołmogorowa.

Bibliografia

Borel E. (1905), *Remarques sur certaines questions de probabilité*, „Bulletin de la Société Mathématique de France", t. 33, s. 123–128.

Borel E. (1909), *Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques*, „Rend. Circ. Mat. Palermo", t. 27, s. 247–270.

Broggi U. (1907), *Die Axiome der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Ph.D. thesis, Universität Göttingen, Göttingen.

Fréchet M. (1938), *Exposé et discussion de quelques recherches récentes sur les fondements du calcul des probabilités*, „Actualités Scientifiques et Industrielles", t. 735, s. 23–55.

Hilbert D. (1902), *Mathematical problems*, „Bull. Amer. Math. Soc.", t. 8, s. 437–479.

Khinchin A.Y., Kolmogorov A.N. (1925), *Über Konvergenz von Reihen, deren Glieder durch den Zufall bestimmt werden*, „Matematiceskij Sbornik (Sbornik: Mathematics)", t. 32, s. 668–677.

Kolmogorov A.N. (1933), *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Springer, Berlin.

Kolmogorov A.N. (1956), *Foundations of the Theory of Probability*, Chelsea Publishing Company, New York.

Laplace P.S. (1902), *A Philosophical Essay on Probabilities*, Chapman & Hall, London.

Łomnicki A. (1923), *Nuoveaux fondements de la théorie des probabilités (Définition de la probabilité fondée sur la théorie des ensembles*), „Fundamenta Math.", t. 4, s. 34–71.

Mazurkiewicz S. (1915), *La théorie des probabilités*, Warszawa.

Moivre A. de (1718), *The Doctrine of Chances*, London.

Plato J. von (1994), *Creating Modern Probability. Its Mathematics, Physics and Philosophy in Historical Perspective*, Cambridge University Press, Cambridge.

Shafer G., Vovk V. (2006), *The Sources of Kolmogorov's Grundbegriffe*, „Statistical Science", t. 21, s. 70–98.

Sierpiński M. (1919), *Sur une définition axiomatique des ensembles measurable*, „Bull. del'Acad. des Sci. de Cracovie", s. 173–178.

Steinhaus H. (1923), *Les probabilités dénombrables et leur rapport à la théorie de la mesure*, „Fund. Math.", t. 4, s. 286–310.

Hugo Dionizy Steinhaus – a Way to Contemporary Probability

Abstract: Hugo Steinhaus (1887–1972) studied mathematics and philosophy at the Jan Kazimierz University in Lwow. Since 1905 he stayed in Göttingen where in 1911 he obtained his PhD under David Hilbert. In 1920 he became professor of the Lwow University. Together with Stefan Banach he established there a strong mathematical center for functional analysis. After the II World War he participated in creation of the mathematics department of the Wroclaw University and he was a founder of Wroclaw school for applied probability. He is the author and coauthor of 250 publications. In 1923 H. Steinhaus published in "Fundamenta Mathematicae" a study of Borel countable probabilities where, among other things, he gave an axiomatic definition of a probability measure on the space of countable zero-one sequences. The goal of this note is to demonstrate a potentially important role of Steinhaus result in the process leading to final axiomatization of probability theory by Andrei Kolmogorov in 1933.

Keywords: history of probability, Hugo Steinhaus

JEL: B16

Received: 2017-12-16; verified: 2018-01-25. Accepted: 2018-03-26